Planche A
Un soupçon de logique

☐ **Exercice A.1**

On considère les deux assertions suivantes :

P: « n est un multiple de 3 » et Q: « n est un multiple de 2 »

Donner des exemples d'entiers n qui vérifient :

a. P ET Q **b.** P OU Q **c.** P XOR Q

☐ **Exercice A.2**

Q 1 Compléter la table de vérité suivante :

P	Q	non P	P et Q	P ou Q	$P \implies Q$	$P \iff Q$	non $Q \implies$ non P
V	V						
V	F						
F	V						
F	F						

Q 2 Remplir la table de vérité pour obtenir P XOR Q XOR Q. Que constatez vous ?

☐ **Exercice A.3 (raisonnement par l'absure)**

On a vu que l'assertion $P \implies Q$ était vraie uniquement si P était fausse, ou si P et Q étaient vraies simultanément.

Q 1 Imaginons que l'on ait réussi à démontrer que l'assertion « $P \implies$ FAUX » était vraie. Que peut-on en déduire sur l'assertion P ?

Q 2 *Application :* soit P l'assertion « $\mathbb{N}$ possède un plus grand élément ». En utilisant le raisonnement de la question précédente, montrer que P est une affirmation fausse.

Q 3 ($\star$) Retrouver la démonstration de $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel...

☐ **Exercice A.4 (Maîtriser la notion d'implication)**

Dire si l'on a : $A \implies B$, ou $B \implies A$ ou $A \iff B$ ou rien.

Q 1 A : x est un entier pair B : x est un multiple de 4.

Q 2 A : x est un entier pair B : x^2 est un multiple de 4.

Q 3 A : x est un entier impair B : $\frac{x-1}{2}$ est un entier.

Q 4 Soit M et N deux points distincts du plan. A : I milieu de $[MN]$ B : $IM = IN$.

Q 5 Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. A : $f'(x) = 2x - 1$ B : $f(x) = x^2 - x$.

☐ Exercice A.5 (Formuler une proposition équivalente)

Soit P une proposition. On appelle "*caractérisation de P*" une proposition équivalente à P.
Donner une caractérisation des propositions suivantes (*plusieurs formulations sont possibles*) :

P_1. Deux vecteurs non nuls de l'espace vérifient : $\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2 + \|\overrightarrow{v}\|^2$.

P_2. Une droite D de l'espace est orthogonale à un plan P.

P_3. Une suite réelle (u_n) vérifie $u_0 = 2$ et pour tout n, $u_{n+1} = 3u_n$.

Pour une suite (u_n) réelle strictement positive : P_4. Pour tout n : $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$.

Pour une fonction f dérivable : P_5. f est croissante sur $\mathbb{R}$.

☐ Exercice A.6 (Savoir résoudre des équations avec $\sqrt{}$)

Dans ce genre de situation, on pensera à toujours commencer par donner l'ensemble de travail (l'ensemble de définition), c'est à dire dans quel ensemble on cherche les valeurs de l'inconnue...

Q 1 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\sqrt{x-1} = 5$

Q 2 On souhaite résoudre l'équation : $\sqrt{x-1} + \sqrt{x+4} = \sqrt{5}$.
(Indic : après avoir déterminé l'ensemble de définition, justifier que $\sqrt{x+4}$ est nécessairement supérieur ou égal à $\sqrt{5}$ puis conclure).
Contrôler votre réponse à l'aide d'une calculatrice graphique.

Q 3 Soit $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}^+$. Étudier les implications entre les équations : $a = \sqrt{b}$ et $a^2 = b$.

Compléter alors : $\boxed{a = \sqrt{b} \iff \left(a^2 = b \text{ et } \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\right)}$

Q 4 *Application :* on souhaite résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) : $x + 1 = \sqrt{1-x}$.

a. Méthode 1 : faire un raisonnement par implications puis contrôler les résultats

b. Méthode 2 : faire un raisonnement par équivalence

Q 5 *Réinvestissement* : résoudre l'équation $x = \sqrt{2-x^2}$.
Ne pas oublier de déterminer en premier l'ensemble de définition...

Q 6 ($\star$) Résoudre l'inéquation $x \leqslant \sqrt{2-x^2}$.

☐ Exercice A.7 (Procéder par disjonction des cas)

On rappelle que $|a| = \begin{cases} a & \text{si } a > 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}$

Répondre aux questions suivantes utilisant cette technique de disjonction des cas :

Q 1 Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, |x-1| \leqslant x^2 - x + 1$ *(Puis vérifier graphiquement)*

Q 2 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $|x+1| = 4 - |3x-2|$ *(Indic : il y a 3 cas à distinguer...)*

☐ **Exercice A.8 (Connaître et utiliser les deux quantificateurs $\forall$ et $\exists$)**

Soit V l'ensemble des vaccins. Soit M l'ensemble des maladies virales.
Si $(v, m) \in V \times M$, on notera $v \hookrightarrow m$ la proposition : « v agit sur m ».

Q 1 Traduire en français les énoncés suivants, et discuter leur pertinence :

- **a.** $\exists\, v \in V \ / \ \forall m \in M,\ v \hookrightarrow m$
- **b.** $\forall m \in M,\ \exists\, v \in V \ / \ v \hookrightarrow m$
- **c.** $\forall v \in V,\ \exists\, m \in M \ / \ v \hookrightarrow m$

Q 2 **Bilan** : les quantificateurs peuvent-ils commuter ?

☐ **Exercice A.9 (Savoir utiliser les quantificateurs dans une caractérisation)**

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. On considère la proposition :

$$\textbf{(P)} : \text{« } f \text{ admet le réel } M \text{ pour maximum global.»}$$

Q 1 Justifier que la prop. **(Q)** : « $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \leqslant M$» n'est pas équivalente à **(P)**.
(Indice : un "maximum global" est défini comme un "majorant atteint".)

Q 2 Énoncer alors une caractérisation de **(P)**.

☐ **Exercice A.10 (Vrai/Faux)**

Répondre par Vrai ou Faux (et justifier)

Q 1 $\forall x < 2,\ x^2 < 4$ (Remarque : c'est un abrégé pour dire : $\forall x \in \mathbb{R},\ x < 2 \implies x^2 < 4$)

Q 2 $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 = 4 \iff x = 2$

Q 3 $\forall n \in \mathbb{N},\ n(n+1)$ est un nombre pair

Q 4 La négation de « la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$ » est « la fonction f est décroissante sur $\mathbb{R}$ »

Q 5 La négation de « tous les élèves ont la moyenne » est « aucun élève n'a la moyenne »

Q 6 La négation de « la nuit, tous les chats sont gris » est « le jour, aucun chat n'est gris »

Q 7 La réciproque de « la nuit, tous les chats sont gris » est « quand tous les chats sont gris, il fait nuit »

Q 8 La contraposée de « la nuit, tous les chats sont gris » est « quand tous les chats sont gris, il fait jour »

Q 9 $\forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{Z}, x \leqslant n$

Q 10 $\exists n \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{R}, x \leqslant n$

Q 11 $\forall n \in \mathbb{N}^*, 2^{n-1} \geqslant n + 1$

☐ **Exercice A.11 (Négation)**

Rédiger la **négation** de ces propositions :

a. M. a au moins un chat. **b.** M. a au plus un chat. **c.** M. n'a ni chat, ni chien.

d. M. a un chat et un chien. **e.** $x \in A \cup B$.

g. Toutes les boulangeries fabriquent du pain (attention : "aucune boulangerie ne fabrique du pain" est fausse, expliquer !)

h. Il existe ("au moins" sous-entendu) un lac salé.

i. Si un aliment est bio, alors il est bon.

j. Si un aliment est mauvais, alors il n'est pas bio

k. S'il pleut, je prends mon parapluie

l. Chaque été, il pleut au moins un jour en Bretagne

m. L'été dernier il a plu tous les jours en Bretagne

n. $2 \leqslant x < y$

Ci-après, f désigne une fonction définie sur $\mathbb{R}$, et a un réel :

o. Pour tout réel x, $0 < f(x) < 1$.

p. Il existe (au moins) un réel x tel que $f(x) \neq 0$.

q. $\forall y \in [0,1],\ \exists x \in \mathbb{R}\ /\ f(x) = y$.

r. $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0\ /\ \forall x \in \mathbb{R},\ |x - a| < \alpha \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

s. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, f(x) = f(y) \Longrightarrow x = y$

☐ **Exercice A.12**

Chercher l'erreur dans le raisonnement suivant :
On considère l'équation $(E) \quad x^2 + x + 1 = 0$ que l'on souhaite résoudre dans $\mathbb{R}^*$ puisque $x = 0$ n'est clairement pas solution. On a d'une part puisque x est non nul : $(E) \Longrightarrow x^3 + x^2 + x = 0$
Mais d'autre part, on a aussi $(E) \Longrightarrow x^2 + x = -1$
En remplaçant il reste $(E) \Longrightarrow x^3 - 1 = 0$, soit encore $(E) \Longrightarrow x = 1$. Ainsi l'équation (E) admet pour unique solution $x = 1$.