CHAPITRE

B

TSI$_1$

2024/2025

Inégalités dans $\mathbb{R}$

Une activité courante en mathématiques est la résoltuion de problème. Dans cette tâche, il est fréquent que l'on ait besoin de résoudre des (in)équations de toutes sortes. Revoyons dans ce chapitre quelques techniques élémentaires sur la manipulation des inégalités et l'étude du signe d'expressions.

Sommaire

I Règles sur les inégalités **2**
I.1 Avec les opérations usuelles . . . 2
I.2 Avec une fonction . . . 2

II Signe d'une expression **3**
II.1 Résolution graphique . . . 3
II.2 Signe d'un produit . . . 4
II.3 Avec les variations d'une fonction . . . 4

III Application classique : position relative de deux courbes **5**

IV Valeur absolue **6**
IV.1 Définition . . . 6
IV.2 Inégalité triangulaire . . . 7

I Règles sur les inégalités

I.1 Avec les opérations usuelles

Propriété I.1.1

La relation $\leqslant$ (idem pour $\geqslant$) est compatibe avec l'addition et la multiplication. Plus précisément, les règles sont les suivantes :

- $\forall x, y, z \in \mathbb{R},\ x \leqslant y \iff x + z \leqslant y + z$
- $\forall x, y, z \in \mathbb{R},\ (x \leqslant y \text{ et } z > 0) \iff x \times z \leqslant y \times z$
- $\forall x, y, z \in \mathbb{R},\ (x \leqslant y \text{ et } z < 0) \iff x \times z \geqslant y \times z$

Remarques – On déduit les règles suivantes :

- $\forall a, b, c, d \in \mathbb{R},\ (a \leqslant b \text{ et } c \leqslant d) \implies a + c \leqslant b + d$
- $\forall a, b, c, d \in \mathbb{R},\ (0 \leqslant a \leqslant b \text{ et } 0 \leqslant c \leqslant d) \implies a \times c \leqslant b \times d$

Attention ! – En particulier on prendra garde de ne pas *soustraire* ni *diviser* des inéquations entre elles.

☐ ✍ **Exercice B.1**

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

Q 1 $\dfrac{3x-2}{4} + 5 \leqslant 3$

Q 2 $\dfrac{1-2x}{3} > 2$

Q 3 $-3x^2 - 5x + 2 \leqslant x(-3x+1)$

Q 4 On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x+1)^2$ et $g(x) = 1 - (x-1)^2$. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) - g(x) \geqslant 1$.

I.2 Avec une fonction

Propriété I.2.1 (appliquer une fonction)

- Si f est une fonction **croissante** sur un intervalle I alors : $\forall x, y \in I,\ x \leqslant y \implies \ldots\ldots\ldots\ldots$
- Si f est une fonction **décroissante** sur un intervalle I alors : $\forall x, y \in I,\ x \leqslant y \implies \ldots\ldots\ldots\ldots$

Remarques – Un cas particulier important est celui où f est la fonction inverse, qui est décroissante sur $I_1 =]-\infty, 0[$ et sur $I_2 =]0\,;+\infty[$:

$$\boxed{\forall x, y \in]-\infty, 0[,\ x \leqslant y \implies \frac{1}{x} \geqslant \frac{1}{y}} \quad \text{et} \quad \boxed{\forall x, y \in]0, +\infty[,\ x \leqslant y \implies \frac{1}{x} \geqslant \frac{1}{y}}$$

Attention ! – Ne pas utiliser cette propriété si x et y ne sont pas de même signe.

☐ ✍ **Exercice B.2**

Résoudre là où c'est possible les inéquations suivantes (attention aux signes...) :

Q 1 $\sqrt{3x-6} \leqslant \sqrt{24-2x}$ **Q 2** $\dfrac{3}{2-x} - 1 < 2$ **Q 3** $\dfrac{2}{x-3} - 4 > 1$

II Signe d'une expression

Les techniques précédentes s'appliquent essentiellement lorsque l'on est capable d'isoler l'inconnue x à l'aide d'opérations élémentaires. Lorsque cela n'est pas possible on ramène notre inéquation à une étude de signe grâce à la propriété suivante :

$$\boxed{\forall a, b \in \mathbb{R},\ a \leqslant b \iff a - b \leqslant 0}$$

Par exemple, si l'on veut résoudre :

$$x^3 - 3x^2 \geqslant x - 3$$

il suffit d'étudier le signe de la fonction $f(x) = x^3 - 3x^2 - (x-3)$ et de donner les valeurs de x qui rendent cette fonction positive (voir exo B.3)

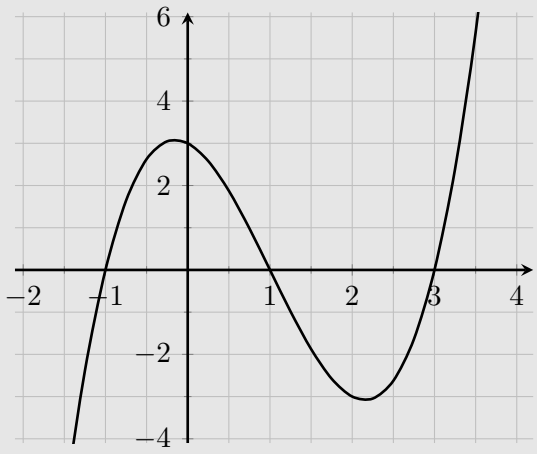
Il est donc important de savoir étudier les signes d'expressions diverses et variées. Voyons trois techniques...

II.1 Résolution graphique

Cette méthode est utilisée pour avoir une *vue d'ensemble* de la situation et permet en principe de *conjecturer* les solutions, mais elle ne donne que des solutions approchées, et ne permet pas de *démontrer* la validité des résultats.

☐ ✍ **Exercice B.3**

Q 1 Déterminer le signe de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$ dont la représentation graphique $\mathscr{C}_f$ est la suivante :



Q 2 Même question avec la fonction $g(x) = \ln(x-1) - x + 7$ *(On utilisera une calculatrice ou un logiciel pour déterminer des valeurs approchées à 10^{-2} près des racines de g)*

II.2 Signe d'un produit

Cette technique est la plus importante et la plus utilisée. Il s'agit d'utiliser l'adage « diviser pour mieux régner », ou encore décomposer un problème compliqué en plusieurs problèmes simples. C'est la règle des signes bien connue ci-dessous qui nous permettra de conclure :

Propriété II.2.1 (règle des signes)

- $\forall A, B \in \mathbb{R},\ A \times B \geqslant 0 \iff A$ et B de même signe.
- $\forall (A, B) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*,\ \dfrac{A}{B} \geqslant 0 \iff A$ et B de même signe.

Si l'expression dont on étudie le signe est déjà sous forme d'un produit, la tâche sera en principe aisée, par contre si ce n'est pas le cas, il faudra essayer de **factoriser** l'expression, et c'est la tâche qui peut être un peu délicate...

☐ ✍ Exercice B.4

Déterminer le signe des fonctions suivantes :

$f_1(x) = (3x-1)(2-x)$ $\quad f_2(x) = \dfrac{4x-12}{5-x}$ $\quad f_3(x) = 3(x-1)^2+2(x-1)$ $\quad f_4(x) = x(x+2)+x^2-x$

☐ ✍ Exercice B.5

Démontrer les inégalités suivantes :

Q 1 $\forall a, b \in \mathbb{R},\ ab \leqslant \dfrac{1}{2}(a^2+b^2)$ $\qquad$ **Q 2** $\forall a, b \in \mathbb{R}^{+*},\ \dfrac{1}{2}(\ln a + \ln b) \leqslant \ln\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$

Dans le cas où l'on n'aurait pas réussi à étudier le signe de l'expression à l'aide d'une factorisation, on peut tenter d'utiliser une étude de fonction, c'est l'objet du paragraphe suivant.

II.3 Avec les variations d'une fonction

Pour déterminer le signe d'une fonction, l'idée est de déterminer ses « zeros » (ou au moins leur existence à l'aide du théorème des valeurs intermédiaires), et de déduire le signe à l'aide des variations.

☐ ✍ Exercice B.6

Q 1 **a.** Étudier le signe de la fonction $f(x) = \mathrm{e}^x - 1$

b. On considère les fonctions g et h définies sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \mathrm{e}^x$ et $h(x) = x + 1$.
Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) \leqslant g(x)$.

Q 2 Montrer que pour tout $x \geqslant 0$, $x - \dfrac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$.

☐ ✍ Exercice B.7

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x^2 + 6x - 4$.

Q 1 Étudier les variations de f.

Q 2 Justifier que l'équation f$(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$ que l'on déterminera.

Q 3 En déduire le tableau de signe de f.

☐ ✍ **Exercice B.8**

Soit la fonction définie sur $I = [-2\,;2]$ par $f(x) = \dfrac{4x+2}{2x^2+2x+1}$

Q 1 Montrer que $f'(x) = \dfrac{-8x(x+1)}{(2x^2+2x+1)^2}$

Q 2 Étudier le signe de $f'(x)$ sur I

Q 3 Déterminer les coordonnées des points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_f$ avec les axes du repère orthonormé.

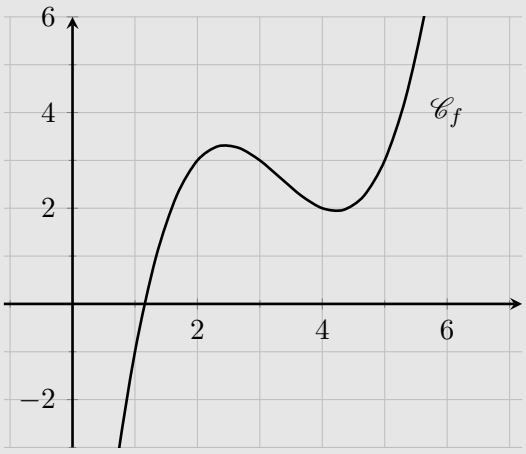
Q 4 À l'aide du tableau de variations, résoudre l'inéquation $f(x) \geqslant 0$.

III Application classique : position relative de deux courbes

Rappel : résoudre $f(x) \leqslant \lambda$ revient à trouver les abscisses des points de la représentation graphique de f qui se situent en-dessous de la droite horizontale d'équation $y = \lambda$.

☐ ✍ **Exercice B.9**

Q 1 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{1}{2}x^3 - 5x^2 + \dfrac{31}{2}x - 12$.



On a dessiné ci-contre la représentation graphique de la fonction f.
Résoudre graphiquement les inéquations :

a. $f(x) \leqslant 3$ **b.** $f(x) > 3$ **c.** $f(x) < 3$

Q 2 Donner la position relative des courbes représentatives des fonctions g et h définies sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \mathrm{e}^x$ et $h(x) = x + 1$ *(On pourra se servir des résultats de l'exercice B.6)*

☐ ✍ **Exercice B.10**

Q 1 Soit $f(x) = x^2 + x - 2$. Vérifier que $f(x) = (x-1)(x+2)$, et en déduire les solutions de l'équation $f(x) = 0$.

Q 2 On considère les fonctions $g(x) = 2x^2 + 4x + 3$ et $h(x) = x^2 + 3x + 5$.

Étudier les positions relatives des courbes représentatives $\mathscr{C}_g$ et $\mathscr{C}_h$ des fonctions g et h.
(On pourra se servir des résultats de la question 1)

IV Valeur absolue

IV.1 Définition

♪ Définition IV.1.1

Pour tout réel x, on appelle *valeur absolue* de x, notée $|x|$, le plus grand des réels x et $-x$.
C'est à dire :

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Propriété IV.1.2

Deux équivalences intéressantes. Soit A un réel positif, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

1. $|x| = A \iff x = A$ OU $x = -A$
2. $|x| \leqslant A \iff -A \leqslant x \leqslant A$

Preuve

S1

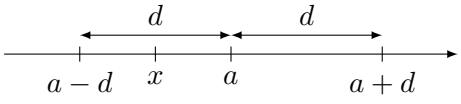
□

Du point de vue géométrique, on dira (par abus de langage) que $|x|$ est la *distance* entre le nombre x et le nombre 0. Plus généralement, on retiendra que :

$|x - y|$ représente la distance entre les nombres x et y

En particulier si d est un réel positif :

$$|x - a| \leqslant d \iff a - d \leqslant x \leqslant a + d$$



Propriété IV.1.3

La valeur absolue est compatible avec la multiplication et la division :

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ |xy| = |x||y| \quad \text{et} \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*,\ \left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$$

☐ ✍ **Exercice B.11**

Exprimer sans valeur ablsolue :

Q 1 $|x^2|$ **Q 2** $|x^3|$ **Q 3** $|x^2+1|$ **Q 4** $|x^3-1|$ **Q 5** $|x^3|-1$

☐ ✍ **Exercice B.12**

Tracer la courbe de la fonction $f : x \mapsto |x+1| - 2|x-2|$

☐ ✍ **Exercice B.13**

Résoudre les inéquations suivantes :

Q 1 $|x+1| \leqslant 4$ **Q 2** $|x+1| > 4$ **Q 3** $|x-1| < |x-2|$

☐ ✍ **Exercice B.14**

Résoudre les équations :

Q 1 $|1+3x| = x+2$ **Q 2** $|x| + |x+2| = 3$ **Q 3** $|x-1| + |2x-1| = |x+1|$

IV.2 Inégalité triangulaire

Propriété IV.2.1

On appelle inégalité triangulaire :

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ |x+y| \leqslant |x| + |y|$$

☐ ✍ **Exercice B.15**

Prouvons l'inégalité triangulaire.
Notons $A = |x+y|$ et $B = |x| + |y|$. On souhaite alors démontrer que $A \leqslant B$.

Q 1 Justifier pourquoi on a : $A \leqslant B \iff A^2 \leqslant B^2$

Q 2 Sachant que pour tout nombre réel c on a $|c|^2 = c^2$ et $c \leqslant |c|$, montrer que $B^2 - A^2 \geqslant 0$.

Q 3 Conclure.

☐ ✍ **Exercice B.16**

En utilisant le fait que $x = x - y + y$, montrer la deuxième inégalité triangulaire :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, |x - y| \geqslant ||x| - |y||$$