

PLANCHE C

(IN)ÉQUATIONS POLYNOMIALES

□ Exercice C.1(sens de variation)

Déterminer les tableaux de variations des fonctions polynômes de degrés inférieur ou égal à 2, définies par les expressions :

$$f_1(x) = 3x - 1 \quad f_2(x) = -2x + 4 \quad f_3(x) = 2x^2 - 8x + 1 \quad f_4(x) = -3x^2 + 6x + 2$$

On utilisera les éléments caractéristiques de ces fonctions de référence, ou la dérivation...

□ Exercice C.2(forme canonique)

On considère les trinômes du second degré suivants :

$$f_1(x) = x^2 - 2x + 3 \quad f_2(x) = -x^2 - 4x \quad f_3(x) = 2x^2 + 4x + 5$$

$$f_4(x) = 3x^2 - 6x - 2 \quad f_5(x) = x^2 - x + 1 \quad f_6(x) = x^2 + 3$$

Q 1 Mettre chacune des fonctions précédentes sous forme canonique.

Q 2 Donner alors les allures des courbes représentatives de chacune de ces fonctions et en préciser les extremums éventuels.

□ Exercice C.3(racines)

Q 1 Donner les racines carrées (réelles ou complexes) des nombres suivants :

$$A = 5 \quad B = -4 \quad C = k^2 - 2k + 1 \quad (\text{où } k \text{ est un réel quelconque}) \quad D = -5$$

Q 2 Résoudre (dans $\mathbb{R}$, puis dans $\mathbb{C}$) les équations suivantes :

a. $3x^2 - 3x - 6 = 0$

e. $2x^2 = 1$

i. $\frac{3}{x} + 2x = 1$

b. $x^2 - 6x = -9$

f. $x^2 - 200x + 10 = 0$

j. $(x - 2)(x + \sqrt{3}) = 0$

c. $x^2 + x + 1 = 0$

g. $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$

k. $(x + 1)(x - 1) = -1$

d. $3x^2 + 4x = 3(x - 1)(x + 2)$

h. $-2x^4 + x^2 + 1 = 0$

□ Exercice C.4

Soit $f(x) = -8x^2 + 2x + 3$ dont on note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative.

Q 1 Résoudre l'équation $f(x) = 3$. En déduire les coordonnées du sommet de la parabole $\mathcal{C}_f$.

Q 2 Dresser le tableau de variation de f .

Q 3 Écrire $f(x)$ sous forme canonique.

Q 4 Donner la forme factorisée de $f(x)$.

□ **Exercice C.5**

Existe-t-il une fonction polynomiale du second degré telle que $f(0) = 1$, $f(1) = 0$ et $f(-1) = 1$?
Si c'est le cas, la déterminer.

□ **Exercice C.6**

On admet que $\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ est l'unique solution positive de l'équation : $x^2 - x - 1 = 0$ (E)
En réinjectant φ dans (E), calculer φ^2 et $\frac{1}{\varphi}$ (uniquement à l'aide de (E)).

□ **Exercice C.7 (relations entre racines)**

Sans utiliser de discriminant, déterminer les racines des trinômes suivants (trouver une racine évidente puis déterminer l'autre grâce aux relations entre les racines) :

$$A(x) = x^2 + x - 2 \quad \text{et} \quad B(x) = 2x^2 + x - 1$$

□ **Exercice C.8**

Déterminer, selon la valeur du nombre réel m , le nombre de solutions des équations suivantes :

Q 1 $2x^2 - mx - m^2 = 0$

Q 2 $mx^2 + 2(2m + 1)x + 1 = 0$

□ **Exercice C.9**

Partie 1

Bob aime bien sauter dans l'eau depuis des falaises de plus en plus hautes. Il aimerait pouvoir facilement estimer la hauteur de son plongeon. Pour cela, un simple chronomètre et un peu de physique vont être suffisants. En effet, il a appris pendant le cours de physique qu'un corps en chute libre parcourt une distance d en fonction du temps donnée par : $d(t) = \frac{1}{2}gt^2$ où g est l'accélération de pesanteur $g \approx 9,81 \text{ m.s}^{-2}$.

Q 1 Comment Bob doit-il s'y prendre ?

Estimer la hauteur du plongeon effectué par Bob sur la vidéo.

Q 2 Quelle doit-être la durée de son plongeon s'il saute d'une hauteur de 15 m ?

Partie 2

Sur le même principe, Alice souhaite mesurer la profondeur d'un puits. Elle lâche un cailloux et mesure le temps qui s'écoule avant d'entendre le "plouf". Elle a chronométré $T = 6 \text{ s}$. Contrairement à la situation de Bob qui pouvait mesurer directement le temps de chute, cette fois-ci il faudra tenir compte (surtout si le puits est profond) du temps mis par le son pour remonter aux oreilles d'Alice. Voilà comment procéder :

On notera p la profondeur inconnue de ce puits.

Q 1 On appelle t_1 le temps de chute de la pierre. En se servant des données physiques de la partie 1, exprimer p en fonction de t_1 .

Q 2 Pour remonter à la surface, le son met un temps t_2 . La vitesse du son est de 340 m.s^{-1} . Exprimer p en fonction de t_2 .

Q 3 En déduire une relation entre t_1 et t_2 .

Q 4 Sachant que $t_2 = 6 - t_1$ montrer que t_1 est solution de l'équation : $9,8t^2 + 680t - 4080 = 0$

Q 5 Quelle est finalement la profondeur du puits ?

☐ **Exercice C.10(signe d'un trinôme)**

Déterminer le tableau de signe complet des trinômes suivants :

$$f_1(x) = x^2 - 6x - 7 \quad f_2(x) = x^2 - 20x + 100 \quad f_3(x) = x^2 - 25x + 156$$

$$f_4(x) = 2x^2 + 11x - 21 \quad f_5(x) = -9x^2 + 6x - 5$$

☐ **Exercice C.11**

Étudier la position relative des courbes représentatives des fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 + 2x - 1$ et $g(x) = x^2 + x + 5$

☐ **Exercice C.12**

Résoudre sur $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

Q 1 $(-2x^2 - 4x - 8)(x^2 + 5x - 14) \leq 0$

Q 3 $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x} \geq 0$

Q 2 $\frac{2x^2 - 5x - 3}{x^2 + 3x + 2} \geq 0$

☐ **Exercice C.13(degré 3)**

On s'intéresse à l'équation $(E) : 3x^3 + x^2 - 5x + 1 = 0$.

Q 1 Conjecturer graphiquement le nombre de solutions de l'équation (E) et proposer une solution évidente.

Q 2 Trouver des réels a , b et c tels que $3x^3 + x^2 - 5x + 1 = (x - 1)(ax^2 + bx + c)$.

Q 3 En déduire les solutions de (E) .

☐ **Exercice C.14**

Factoriser dans $\mathbb{R}$ les fonctions suivantes :

$$f_1(x) = -6x^3 + 17x^2 - 14x + 3 \quad f_2(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x - 3 \quad f_3(x) = 2x^3 + 3x^2 - x + 2$$

☐ **Exercice C.15**

Soient les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$ et $g(x) = -x^3 + 2x^2 + 3x$. Étudier les positions relatives des courbes représentatives $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ dans un repère orthonormé du plan.