PLanche D : géométrie (les bases)

☐ **Exercice D.1**

Soit un triangle non aplati ABC et I le milieu du segment $[AB]$.

Q 1 Exprimer la somme vectorielle $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{MI}$.

Q 2 Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que la famille $\{\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}, \overrightarrow{AC}\}$ est liée.

☐ **Exercice D.2 (changement de base)**

Le plan est muni d'une base $\mathscr{B} = \{\vec{u}, \vec{v}\}$ de vecteurs du plan. Soit $\vec{w}_1\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$, $\vec{w}_2\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}$ et $\vec{w}_3\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ trois vecteurs du plan (les coordonnées sont données dans la base $\mathscr{B}$).

Q 1 Déterminer les coordonnées dans $\mathscr{B}$ du vecteur $\vec{w} = -3\vec{w}_1 + 2\vec{w}_2 - 5\vec{w}_3$.

Q 2 Déterminer un couple de réels $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\vec{u} = \alpha\overrightarrow{w_1} + \beta\overrightarrow{w_2}$.

Q 3 **a.** Démontrer de même que $\vec{v} = \dfrac{3}{17}\overrightarrow{w_1} + \dfrac{2}{17}\overrightarrow{w_2}$.

b. Pourquoi $\overrightarrow{w_1}$ et $\overrightarrow{w_2}$ forment-ils une base $\mathscr{B}'$ du plan ?

c. Quelles sont les coordonnées de $\overrightarrow{w_3}$ dans $\mathscr{B}'$?

☐ **Exercice D.3 (changement de base)**

Le plan est rapporté à un repère $\mathscr{R} = (O\,;\vec{i}, \vec{j})$ de vecteurs du plan dont on note $\mathscr{B} = \{\vec{i}, \vec{j}\}$ la base orthonormée de vecteurs associée.

Q 1 **a.** Vérifier que les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}_{\mathscr{B}}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}6\\-4\end{pmatrix}_{\mathscr{B}}$ forment une base de vecteurs du plan notée $\mathscr{B}'$.

b. Déterminer les coordonnées du vecteur $\vec{w}\begin{pmatrix}4\\9\end{pmatrix}_{\mathscr{B}}$ dans la base $\mathscr{B}'$.

Q 2 Soit $A(3\,;2)$ dans le repère $\mathscr{R}$. Quelles sont les coordonnées du point A dans le repère $\mathscr{R}' = (O\,;\vec{u}, \vec{v})$?

Q 3 Quelles sont les coordonnées du point A dans le repère $\mathscr{R}'' = (\Omega\,;\vec{u}, \vec{v})$, ou $\Omega(2\,;-3)_{\mathscr{R}'}$?

☐ **Exercice D.4**

Soit $ABCD$ un quadrilatère. En utilisant un repère bien choisi, montrer que les diagonales $[AC]$ et $[BD]$ se coupent en leur milieu si et seulement si $ABCD$ est un parallélogramme.

☐ **Exercice D.5 (Affixes)**

Refaire l'exercice précédent en utilisant les nombres complexes pour le repérage.

☐ **Exercice D.6 (Passage en polaire)**

Déterminer les coordonnées polaires de $A(1, -\sqrt{3})$, de $B(-2, 2)$, de $C(-\sqrt{3}, -1)$ et de $D(-6, 8)$.

☐ **Exercice D.7 (Coordonnées polaires)**

Le plan est rapporté à un repère $\mathscr{R} = (O\,;\vec{\imath}, \vec{\jmath})$. On donne les points suivants définis par leurs coordonnées polaires :

$$A\left[1, \frac{\pi}{4}\right] \quad B\left[\sqrt{2}, \frac{5\pi}{4}\right] \quad C\left[2, \frac{\pi}{4}\right]$$

Q 1 **a.** Représenter ces points et donner leurs coordonnées cartésiennes.

b. Justifier que ces points sont alignés sur une droite passant par O.

Q 2 Donner les coordonnées polaires de A, B, C et O dans le repère $\mathscr{R}' = (A\,;\vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

☐ **Exercice D.8 (Barycentres)**

ABC est un triangle.

Q 1 Placer le point G barycentre de $(A, 1)$, $(B, -1)$, $(C, 1)$.

Q 2 Montrer que $ABCG$ est un parallélogramme.

☐ **Exercice D.9 (Barycentres)**

On considère trois points $A(2, 1)$, $B(-3, -1)$ et $C(5, 2)$. Déterminer les coordonnées du barycentre de $(A\,; 2)$, $(B\,; -2)$ et $(C\,; 3)$.

☐ **Exercice D.10 (Barycentres)**

On considère deux points A et B.

Q 1 Que dire de l'ensemble des barycentres de A et B ?

Q 2 Que dire de l'ensemble des barycentres de A et B dont les coefficients ont même signe ?

Q 3 Quel est l'ensemble des points M barycentres de $(A\,; t)$, $(B\,; 1-t)$ avec $t \in [0, 1]$?

☐ **Exercice D.11 (Barycentres et associativité)**

On considère les points $A(-5, 3)$, $B(1, 0)$, $C(-5, -6)$ et $D(1, -2)$.

Q 1 Déterminer les coordonnées du barycentre I des points $(A, 2)$ et $(B, 1)$.

Q 2 Déterminer les coordonnées du barycentre J des points $(C, 3)$ et $(D, -1)$.

Q 3 Déterminer les coordonnées du barycentre K des points $(I, 3)$ et $(J, 2)$.

Q 4 Déterminer les coordonnées du barycentre L des quatre points $(A, 2)$, $(B, 1)$, $(C, 3)$ et $(D, -1)$. Que remarque-t-on ?

Quelques exercices supplémentaires

☐ **Exercice D.12**

Soit ABC un triangle, D le barycentre de $(A,1),(B,2),(C,3)$, E le barycentre de $(A,2),(B,3),(C,1)$ et F le barycentre de $(A,3),(B,1),(C,2)$.
Montrer que le centre de gravité du triangle ABC est aussi le centre de gravité du triangle DEF.

☐ **Exercice D.13 (lieu de points)**

A et B sont deux points distincts. On considère C le barycentre de $(A,2)(B,3)$ et D le barycentre de $(A,3)(B,2)$.

Q 1 Déterminer la nature de l'ensemble des points M tels que $||2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}||=10$.

Q 2 Déterminer la nature de l'ensemble des points M tels que :

$$||2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}||=||3\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}||$$

☐ **Exercice D.14 (lieux de points)**

Soit ABC un triangle.

Q 1 Déterminer la nature de l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}$ soit colinéaire à $\overrightarrow{BC}$

Q 2 Déterminer la nature de l'ensemble des points M tels que

$$||\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}||=||\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}||$$

☐ **Exercice D.15**

On considère un triangle ABC du plan .

Q 1 **a.** Déterminer et construire le point G, barycentre du système de points pondérés :

$$\{(A\,;1)\,;(B\,;-1)\,;(C\,;1)\}$$

b. Déterminer et construire le point G', barycentre du système de points pondérés :

$$\{(A\,;1)\,;(B\,;5)\,;(C\,;-2)\}$$

Q 2 **a.** Soit J le milieu de $[AB]$. Exprimer $\overrightarrow{GG'}$ et $\overrightarrow{JG'}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ et en déduire l'intersection des droites (GG') et (AB).

b. Montrer que le barycentre I du système de points pondérés : $\{(B\,;2)\,;(C\,;-1)\}$ appartient à (GG').

Q 3 Soit D un point quelconque du plan et O le milieu de $[CD]$ et K le milieu de $[OA]$. Déterminer trois réels a,b,c tels que K soit le barycentre du système de points pondérés :

$$\{(A\,;a)\,;(D\,;d)\,;(C\,;c)\}$$