Planche H : quelques récurrences

☐ **Exercice H.1 (avec égalité)**

On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+u_n} \\ u_0 = 2 \end{cases}$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $u_n = \dfrac{2}{2n+1}$.

☐ **Exercice H.2 (avec égalité)**

On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_{n+1} = 2u_n - 1 \\ u_0 = 3 \end{cases}$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $u_n = 2^{n+1} + 1$.

☐ **Exercice H.3 (avec égalité)**

Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_{n+1} = 2u_n + 1 \\ u_0 = 0 \end{cases}$

Conjecturer l'expression générale de cette suite (penser aux puissances de 2…), puis la démontrer.

☐ **Exercice H.4 (avec égalité)**

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = u_n + 2n + 5$.
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $u_n = n^2 + 4n + 2$.

☐ **Exercice H.5 (avec égalité)**

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = \dfrac{5u_n + 3}{u_n + 3}$

Q 1 Calculer u_1 et u_2 puis émettre une conjecture sur u_n.

Q 2 Démontrer cette conjecture par récurrence.

☐ **Exercice H.6 (avec inégalité)**

On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{9}{6-u_n} \\ u_0 = 0 \end{cases}$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $0 < u_n < 3$.

☐ **Exercice H.7 (avec inégalité)**

On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{1+2u_n}{1+u_n} \\ u_0 = 0 \end{cases}$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $0 \leqslant u_n \leqslant 2$.

☐ **Exercice H.8 (avec inégalité)**

Démontrer qu'à partir d'un certain rang n_0 à déterminer on a : $\forall n \geqslant n_0, \quad 100n \leqslant 2^n$.

☐ **Exercice H.9 (avec inégalité)**

Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n on a $(1+\pi)^n \geqslant 1 + n\pi$

☐ **Exercice H.10 (avec inégalité)**

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 10$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + 1$.
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 0$.

☐ **Exercice H.11 (avec inégalité)**

Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geqslant 2$ on a $4^n \geqslant 4n + 1$.

☐ **Exercice H.12 (avec inégalité)**

Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geqslant 6$, $2^n > 3n + 1$.

☐ **Exercice H.13 (avec inégalité)**

On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_{n+1} = \sqrt{1+u_n} \\ u_0 = 1 \end{cases}$
Montrer que (u_n) est croissante.

☐ **Exercice H.14 (avec inégalité)**

On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{n} \\ u_1 = 1 \end{cases}$
Montrer que (u_n) est croissante.

☐ **Exercice H.15 (avec inégalité)**

On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_{n+1} = 2u_n + \dfrac{n}{3} \\ u_0 = 1 \end{cases}$.
Montrer que (u_n) est croissante.

☐ **Exercice H.16**

Q 1 Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 4^n - 1$ est divisible par 3.

Q 2 **a.** Montrer que la proposition suivante est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$:

« Si $4^n + 1$ est un multiple de 3 alors $4^{n+1} + 1$ aussi »

b. Que pensez-vous de la divisibilité par 3 de $4^n + 1$?

☐ Exercice H.17

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $10^n - 1$ est un multiple de 9.

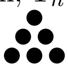
☐ Exercice H.18

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, 6 divise $5n^3 + n$.

☐ Exercice H.19 (Nombre triangulaires)

Q 1 Démontrer par récurrence la formule que l'on connaitra d'ailleurs par cœur :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad T_n = \sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Pour information, T_n est appelé le n^{ieme} *nombre triangulaire*, car on peut le représenter par des triangles : $T_3 =$ 

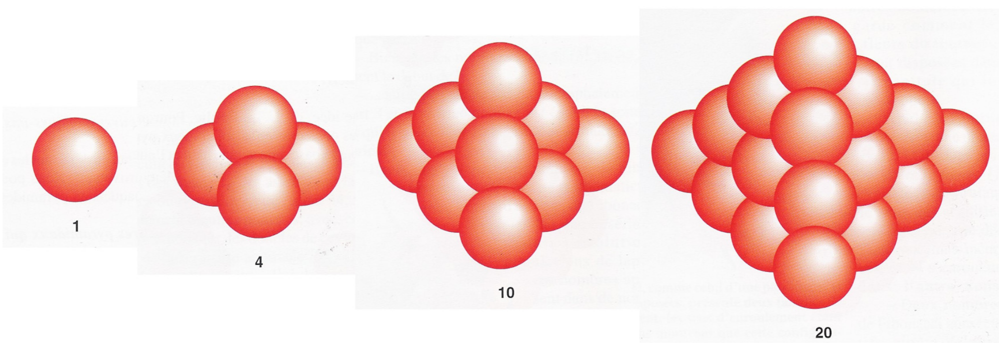
Q 2 Sans faire de récurrence, déduire que : $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$.

Q 3 Redémontrer l'égalité précédente avec une récurrence.
Pour information : il est très facile de déterminer le n^{ieme} nombre carré (c'est n^2). Mais on peut essayer d'imaginer des nombres pentagonaux ou autres. . . Pour ceux qui sont intéressés par le sujet, on peut commencer par la page Wikipedia :https://fr.wikipedia.org/wiki/Nombre_polygonal

☐ Exercice H.20 (Nombres tétraédriques)

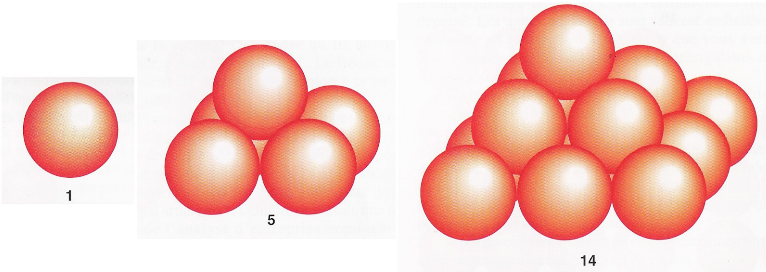
On a vu dans un exercice précédent des nombres triangulaires. Que se passe-t-il si on décide d'empiler ces nombres (voir figure). On obtient des nombres dit tétraédriques. Montrer la formule :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \theta_n = \sum_{k=1}^{n} T_k = T_1 + T_2 + T_3 + \cdots + T_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$



Pour information, cette *curieuse formule* semble se généraliser. Si on somme les nombres tétraédriques, on va tomber sur une formule du type $\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{\cdots}$.

☐ Exercice H.21 (Nombres pyramidaux à base carrée)



Si l'on somme les nombres carrés, on obtient des nombres pyramidaux à base carrée (voir figure). Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \pi_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

☐ Exercice H.22

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$\frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \frac{1}{3\times 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

☐ Exercice H.23 (Récurrence forte)

Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_0 + u_1 + \cdots + u_n \end{cases}$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad u_{n+1} = 2^n$.

☐ Exercice H.24

On suppose connu le résultat :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \exp(a+b) = \exp(a) \times \exp(b) \qquad \text{et} \qquad \exp(0) = 1$$

Montrer par récurrence que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$\exp(nx) = \exp(x)^n$$

☐ Exercice H.25 (Une récurrence géométrique)

On s'intéresse à la somme des angles d'un polygone convexe (triangle, quadrilatère, pentagone, hexagone, etc.).

On note A_n la somme des angles d'un polygone convexe à n côtés. Montrer (ou expliquer) à l'aide d'un raisonnement par récurrence que pour tout $n \geqslant 3$ on a $A_n = (n-2) \times 180$.