

PLANCHE M: ENSEMBLES/APPLICATIONS

□ Exercice M.1 (Rappels sur quantificateurs)

Soient I un intervalle de \mathbb{R} et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur I à valeurs réelles.

Exprimer à l'aide d'ensembles et de quantificateurs les assertions suivantes :

- | | |
|---|--|
| a) la fonction f s'annule | b) la fonction f est la fonction nulle |
| c) f n'est pas une fonction constante | d) f ne prend jamais deux fois la même valeur |
| e) la fonction f présente un minimum | f) f prend des valeurs arbitrairement grandes. |

□ Exercice M.2 (Opérations sur les ensembles)

Soit E un ensemble. Considérons A , B et C des sous ensembles de E .

Montrer chacune des propositions suivantes :

Q1 $A \cap B = A \cup B \iff A = B.$

Q3 $(A \setminus B) \cup (A \setminus C) = A \setminus (B \cap C)$

Q2 $(A \setminus C) \setminus (B \setminus C) = A \setminus (B \cup C)$

Q4 $\{y \in \mathbb{R} / \exists x \in [-1; 2], y = x^2\} = [0; 4]$

□ Exercice M.3 (Parties d'un ensemble)

Déterminer $\mathcal{P}(E)$ lorsque $E = \{1, 2, 3\}$.

□ Exercice M.4 (Produit cartésien)

On note E l'ensemble des solutions de l'équation $t^2 \leq 4$ et F l'ensemble des solutions de l'équation $t^2 \geq 1$. Dessiner dans un repère orthonormé l'ensemble $E \times F$.

□ Exercice M.5 (Antécédents)

Q1 On considère l'application $D : f \in E \mapsto f' \in E$ où E est l'ensemble des fonctions infiniment dérivables. Déterminer les antécédents éventuels par D de $g : x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$

Q2 On considère l'application $f : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto (x + y - z, x - 2y + z) \in \mathbb{R}^2$. Déterminer les antécédents éventuels de $Y = (1, 2)$ par f .

□ Exercice M.6 (Images, images réciproques)

On considère l'application carrée f définie sur \mathbb{R} . Déterminer les ensembles suivants :

Q1 $f([-2; 2]), f([-1; 2]).$

Q2 $f^{-1}([0; 4]), f^{-1}([-2; 4]), f^{-1}([-2; -1]).$

□ Exercice M.7 (Images réciproques)

Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Représenter graphiquement les ensembles $\varphi^{-1}(\{0\})$ et $\varphi^{-1}(\mathbb{R}^+)$.

$$(x, y) \mapsto x^2 - y^2$$

□ **Exercice M.8 (Propriété des images directes)**

Soit $f : E \rightarrow F$, $A \subset E$ et $A' \subset E$. Montrer que :

Q1 $A \subset A' \implies f(A) \subset f(A')$

Q2 $f(A \cup A') = f(A) \cup f(A')$

Q3 a. $f(A \cap A') \subset f(A) \cap f(A')$ (*Be careful, this result is not so natural !*)

b. Utiliser la fonction carrée pour exhiber deux sous-ensembles A et A' tels que $f(A \cap A') \neq f(A) \cap f(A')$

□ **Exercice M.9 (Propriétés des images réciproques)**

Soit $f : E \rightarrow F$, B et B' deux parties de F . Montrer que :

Q1 $B \subset B' \implies f^{-1}(B) \subset f^{-1}(B')$

Q3 $f^{-1}(B \cap B') = f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B')$

Q2 $f^{-1}(B \cup B') = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B')$

Q4 $f^{-1}(\overline{B}) = \overline{f^{-1}(B)}$

□ **Exercice M.10 (Injectivité)**

Soit A une partie de E , strictement incluse dans E . L'application f_A suivante est-elle injective ?

$$f_A : X \in \mathcal{P}(E) \mapsto X \cap A \in \mathcal{P}(E)$$

□ **Exercice M.11 (Surjectivité)**

Soit A une partie de E . On considère l'application

$$f_A : X \in \mathcal{P}(E) \mapsto X \cap A \in \mathcal{P}(E)$$

Montrer que f_A est surjective si et seulement si $A = E$.

□ **Exercice M.12**

Écrire des caractérisations pour f injective, f surjective et f bijective à l'aide de l'ensemble $f^{-1}(\{y\})$.

□ **Exercice M.13**

Soit $F : \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$. F est-elle injective ? Surjective ?

$$(p, q) \mapsto \frac{p}{q}$$

Quels sont les antécédents de 0 et de 1 ? Que vaut $F(\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*)$?

□ **Exercice M.14**

On considère les applications f et g de \mathbb{N} dans \mathbb{N} définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, f(n) = 2n \text{ et } \begin{cases} g(n) = \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ g(n) = \frac{n-1}{2} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

Étudier l'injectivité et la surjectivité de f et g , puis déterminer $f \circ g$ et $g \circ f$.

□ **Exercice M.15**

Soit $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow H$ deux applications.

Q1 Montrer que si $g \circ f$ est injective et f surjective, alors g est injective.

Q2 Montrer que si $g \circ f$ est surjective et g injective, alors f est surjective.

□ **Exercice M.16**

Soit $f : E \rightarrow E$ vérifiant $f \circ f \circ f = f$. Montrer que f injective \iff f surjective.

□ **Exercice M.17 (bijectivité)**

Considérons l'application $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $(x, y) \mapsto (x + 2y, 2x + 3y)$

Pour un couple quelconque (X, Y) donné, en résolvant le système $h(x, y) = (X, Y)$, d'inconnue (x, y) , montrer que h est bijective et exprimer h^{-1} .

□ **Exercice M.18**

Soit $f : E \rightarrow F$ une application.

Q1 Soit $A \subset E$. Comparer A et $f^{-1}(f(A))$, puis montrer que si f est injective alors $A = f^{-1}(f(A))$.

Q2 Réciproquement, montrer que si $\forall A \in \mathcal{P}(E), A = f^{-1}(f(A))$ alors f est injective.

Q3 Soit $B \subset F$. Comparer B et $f(f^{-1}(B))$, puis montrer que si f est surjective alors $B = f(f^{-1}(B))$.

Q4 Réciproquement, montrer que si $\forall B \in \mathcal{P}(F), B = f(f^{-1}(B))$ alors f est surjective.

Faire les 2 exercices suivants après le chapitre sur la résolution de système...

□ **Exercice M.19**

Q1 Montrer que $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ est injective.
 $(x, y) \mapsto (x + y, y - x, 2x + y)$

Q2 Quelle est l'image $f(\mathcal{D})$ de la droite \mathcal{D} d'équation $x + y = 1$?

□ **Exercice M.20**

Q1 Montrer que $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ est surjective.
 $(x, y, z) \mapsto (2x + y - z, 3x + 2y + 5z)$

Q2 Quelle est l'image $g(\mathcal{P})$ du plan \mathcal{P} d'équation $x + y + 6z = 1$?