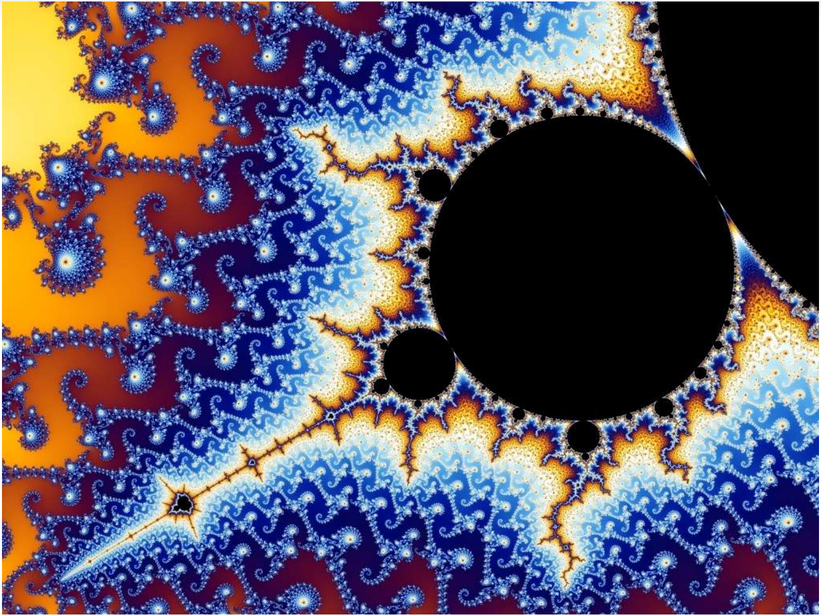
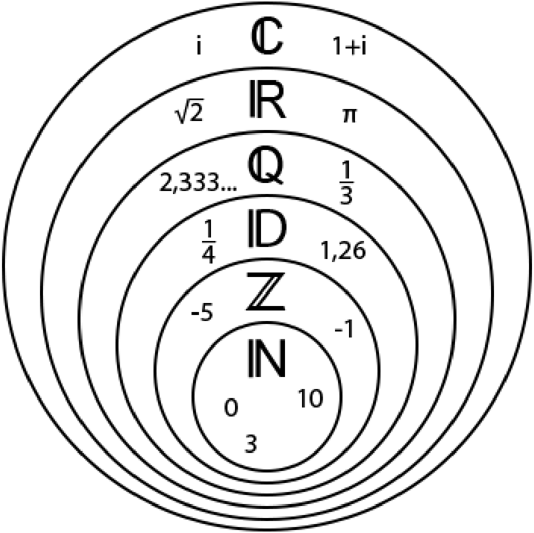
Complexes ? ?

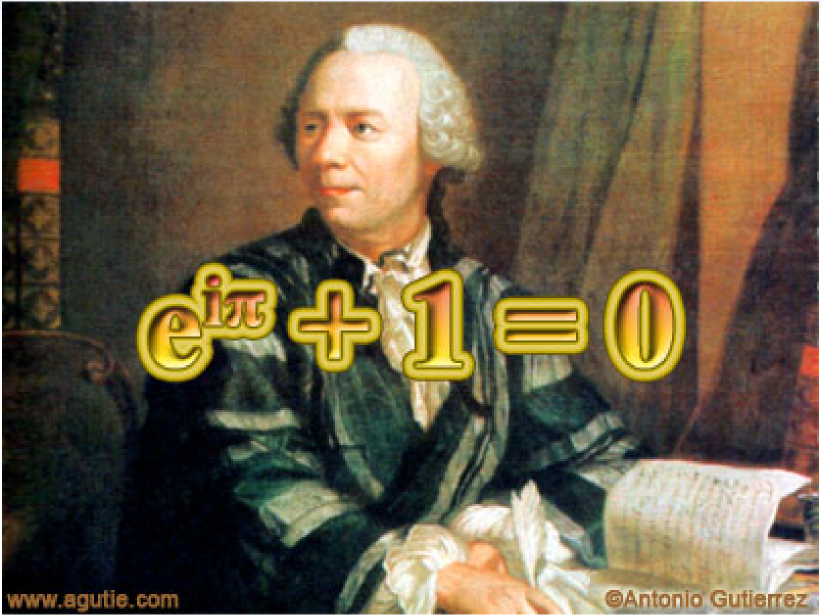
$\boldsymbol{i}$

Au-delà du

réel




i
$\mathbb{C}$
1+i
$\sqrt{2}$
$\mathbb{R}$
π
2,333...
$\mathbb{Q}$
$\frac{1}{3}$
$\frac{1}{4}$
$\mathbb{D}$
1,26
$\mathbb{Z}$
-5
-1
$\mathbb{N}$
10
0
3



$e^{i\pi} + 1 = 0$
www.agutie.com
©Antonio Gutierrez

Voir le deuxième volet de la série de vidéos « `dimensions` » éditée par l'école normale supérieure de Lyon...

Pourquoi des complexes ? Un soupçon d'histoire...

Au commencement, il y avait les nombres

Pourquoi des complexes ? Un soupçon d'histoire...

Au commencement, il y avait les nombres entiers. $\rightarrow$ ensemble $\mathbb{N}$

Pourquoi des complexes ? Un soupçon d'histoire...

Au commencement, il y avait les nombres entiers. $\rightarrow$ ensemble $\mathbb{N}$

Puis avec l'apparition des commerces, on a cherché à résoudre des équations du type :

$$x + 1 = 0$$

Pourquoi des complexes ? Un soupçon d'histoire...

Au commencement, il y avait les nombres entiers. $\rightarrow$ ensemble $\mathbb{N}$

Puis avec l'apparition des commerces, on a cherché à résoudre des équations du type :

$$x + 1 = 0$$

Ce qui a donné l'ensemble des entiers relatifs. $\rightarrow$ ensemble $\mathbb{Z}$

Pourquoi des complexes ? Un soupçon d'histoire...

Au commencement, il y avait les nombres entiers. $\rightarrow$ ensemble $\mathbb{N}$

Puis avec l'apparition des commerces, on a cherché à résoudre des équations du type :

$$x + 1 = 0$$

Ce qui a donné l'ensemble des entiers relatifs. $\rightarrow$ ensemble $\mathbb{Z}$

Pour parler de partages, on a eu besoin de résoudre des équations du type :

$$3 \times x = 10$$

Pourquoi des complexes ? Un soupçon d'histoire...

Au commencement, il y avait les nombres entiers. $\rightarrow$ ensemble $\mathbb{N}$

Puis avec l'apparition des commerces, on a cherché à résoudre des équations du type :

$$x + 1 = 0$$

Ce qui a donné l'ensemble des entiers relatifs. $\rightarrow$ ensemble $\mathbb{Z}$

Pour parler de partages, on a eu besoin de résoudre des équations du type :

$$3 \times x = 10$$

Ce qui a donné l'ensemble des rationnels. $\rightarrow$ ensemble $\mathbb{Q}$

Pourquoi des complexes ? Un soupçon d'histoire...

Au commencement, il y avait les nombres entiers. $\rightarrow$ ensemble $\mathbb{N}$

Puis avec l'apparition des commerces, on a cherché à résoudre des équations du type :

$$x + 1 = 0$$

Ce qui a donné l'ensemble des entiers relatifs. $\rightarrow$ ensemble $\mathbb{Z}$

Pour parler de partages, on a eu besoin de résoudre des équations du type :

$$3 \times x = 10$$

Ce qui a donné l'ensemble des rationnels. $\rightarrow$ ensemble $\mathbb{Q}$

Plus tard, avec l'apparition de la géométrie on a rencontré des équations du type :

$$x^2 = 2$$

Pourquoi des complexes ? Un soupçon d'histoire...

Au commencement, il y avait les nombres entiers. $\rightarrow$ ensemble $\mathbb{N}$

Puis avec l'apparition des commerces, on a cherché à résoudre des équations du type :

$$x + 1 = 0$$

Ce qui a donné l'ensemble des entiers relatifs. $\rightarrow$ ensemble $\mathbb{Z}$

Pour parler de partages, on a eu besoin de résoudre des équations du type :

$$3 \times x = 10$$

Ce qui a donné l'ensemble des rationnels. $\rightarrow$ ensemble $\mathbb{Q}$

Plus tard, avec l'apparition de la géométrie on a rencontré des équations du type :

$$x^2 = 2$$

Ce qui a donné l'ensemble des réels. $\rightarrow$ ensemble $\mathbb{R}$

Pourquoi des complexes ? Un soupçon d'histoire...

Il reste alors un problème, c'est la résolution de

$$x^2 = -1$$

Pourquoi des complexes ? Un soupçon d'histoire...

Il reste alors un problème, c'est la résolution de

$$x^2 = -1$$

Une question :
À quoi cela peut-il bien servir de résoudre cette équation ? !

Pourquoi des complexes ? Un soupçon d'histoire...

Il reste alors un problème, c'est la résolution de

$$x^2 = -1$$

Une question :

À quoi cela peut-il bien servir de résoudre cette équation ?!

C'est au XVIe siècle que que l'on justifia son utilité !

Équation du 3e degré

Un italien **Scipione dal Ferro (début XVIe)** avait établi que l'équation :

$$x^3 + ax = b$$

admettait pour solution

$$\boxed{x = \sqrt[3]{\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{\Delta}{108}}} + \sqrt[3]{\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{\Delta}{108}}}}$$

avec

$$\Delta = 27b^2 + 4a^3$$

Équation du 3e degré

Un italien **Scipione dal Ferro (début XVIe)** avait établi que l'équation :

$$x^3 + ax = b$$

admettait pour solution

$$\boxed{x = \sqrt[3]{\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{\Delta}{108}}} + \sqrt[3]{\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{\Delta}{108}}}}$$

avec

$$\Delta = 27b^2 + 4a^3$$

Un problème subsistait ! Alors que l'équation $x^3 + ax = b$ admet toujours au moins une solution (pourquoi ?)

Équation du 3e degré

Un italien **Scipione dal Ferro (début XVIe)** avait établi que l'équation :

$$x^3 + ax = b$$

admettait pour solution

$$\boxed{x = \sqrt[3]{\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{\Delta}{108}}} + \sqrt[3]{\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{\Delta}{108}}}}$$

avec

$$\Delta = 27b^2 + 4a^3$$

Un problème subsistait ! Alors que l'équation $x^3 + ax = b$ admet toujours au moins une solution (pourquoi ?) , les formules précédentes ne s'appliquent que si $\Delta \geqslant 0 \ldots$

Équation du 3e degré

C'est **Bombelli (fin XVIe)** qui un siècle plus tard considéra l'équation

$$x^3 - 15x = 4$$

Ici on $a = -15$, et $b = 4$, ce qui donne $\dfrac{\Delta}{108} = -121 < 0\,!$

Équation du 3e degré

C'est **Bombelli (fin XVIe)** qui un siècle plus tard considéra l'équation

$$x^3 - 15x = 4$$

Ici on $a = -15$, et $b = 4$, ce qui donne $\dfrac{\Delta}{108} = -121 < 0\,!$

Bombelli osa écrire $S = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$.

Équation du 3e degré

C'est **Bombelli (fin XVIe)** qui un siècle plus tard considéra l'équation

$$x^3 - 15x = 4$$

Ici on $a = -15$, et $b = 4$, ce qui donne $\dfrac{\Delta}{108} = -121 < 0$!

Bombelli osa écrire $S = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$.
En remarquant que si on définit un nouveau nombre noté i tel que $i^2 = -1$, il pouvait écrire « formellement » :

$$\sqrt{-121} = \sqrt{i^2 \times 11^2} = 11i$$

Équation du 3e degré

C'est **Bombelli (fin XVIe)** qui un siècle plus tard considéra l'équation

$$x^3 - 15x = 4$$

Ici on $a = -15$, et $b = 4$, ce qui donne $\dfrac{\Delta}{108} = -121 < 0$!

Bombelli osa écrire $S = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$.
En remarquant que si on définit un nouveau nombre noté i tel que $i^2 = -1$, il pouvait écrire « formellement » :

$$\sqrt{-121} = \sqrt{i^2 \times 11^2} = 11i$$

et ensuite :

$$S = \sqrt[3]{2 + 11i} + \sqrt[3]{2 - 11i}$$

Un miracle ?

Et c'est là que le miracle s'accomplit...

Un miracle ?

Et c'est là que le miracle s'accomplit...

En effet, après quelques calculs, il s'aperçut que

$$(2+i)^3 = 2 + 11i$$

et

$$(2-i)^3 = 2 - 11i$$

Un miracle ?

Et c'est là que le miracle s'accomplit...

En effet, après quelques calculs, il s'aperçut que

$$(2+i)^3 = 2+11i$$

et

$$(2-i)^3 = 2-11i$$

Ce qui donne $S = 2+i+2-i$

Un miracle ?

Et c'est là que le miracle s'accomplit...

En effet, après quelques calculs, il s'aperçut que

$$(2+i)^3 = 2 + 11i$$

et

$$(2-i)^3 = 2 - 11i$$

Ce qui donne $S = 2 + i + 2 - i = 4$!

Et on peut vérifier que 4 est bien une solution de notre équation...