PLANCHE Q : SYSTÈMES

□ Exercice Q.1 (Résolution « naïve » de systèmes)

Trouver les solutions éventuelles des systèmes :

$$(S_1) \begin{cases} 3x - 6y = 1 \\ -2x + 4y = 3 \end{cases} \quad (S_2) \begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ 3x + 2y = 2 \end{cases} \quad (S_3) \begin{cases} 3x + y = 1 \\ 2x - 5y = 3 \\ -x + 11y = -5 \end{cases} \quad (\mathcal{S}_4) \begin{cases} x + 3y - z = 0 \\ 3x + 2z = 1 \\ -2x + y - z = 0 \end{cases}$$

□ Exercice Q.2 (produit matriciel)

Calculer les produits matriciels $A \times B$ quand cela est possible :

$$\begin{array}{ll} \mathbf{Q1} & A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} & \mathbf{Q3} & A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ \mathbf{Q2} & A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} & \mathbf{Q4} & A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

□ Exercice Q.3 (Matrices Échelonnées Réduites par Lignes)

Par des opérations élémentaires sur les lignes, trouver dans chaque cas la matrice échelonnée réduite par ligne (ERL) des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 15 & -12 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0,5 & 1 & 0,5 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

□ Exercice Q.4 (Résoudre un système non carré)

Résoudre les systèmes en utilisant (ou pas) la méthode de Gauss:

$$(S_1) \begin{cases} x + y + 2z + 3t = 1 \\ x + y + z - t = 2 \end{cases}, \quad (S_2) \begin{cases} x + 4y + 3z + t = 1 \\ 2x + 5y + 4z - t = 4 \\ x - 3y - 2z + 3t = 5 \end{cases} \quad \text{et} \quad (S_3) \begin{cases} x + y - z = 1 \\ -x + y + z = 1 \\ 3x - 2y + z = -4 \\ 2x + 4y + 3z = 2 \end{cases}$$

□ Exercice Q.5 (Algorithme de Gauss)

Faire fonctionner l'algorithme de Gauss vu en cours sur les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -3 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 10 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

□ **Exercice Q.6 (Avec des paramètres)**

Résoudre, suivant les valeurs de $(\lambda, a, b, c) \in \mathbb{R}^3$:

$$(\mathcal{S}_1) \begin{cases} \lambda x + y = \lambda + 1 \\ x + \lambda y = 2 \end{cases} \quad (\mathcal{S}_2) \begin{cases} x + 2y - z = a \\ -2x - 3y + 3z = b \\ x + y - 2z = c \end{cases}$$

□ **Exercice Q.7 (Géométrie dans l'espace)**

Soit m réel fixé, et soient les deux sous-ensembles de $\mathbb{R}^3$:

$$E_1 = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \begin{cases} x = m(1+t) \\ y = 1 + m^2 t \\ z = 1 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$E_2 = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \begin{cases} x = t + m^2 t' \\ y = m(t + t') \\ z = mt - m^3 t' \end{cases}, (t, t') \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

Q1 Déterminer, suivant m , le nombre de triplets contenus dans $E_1 \cap E_2$.

Q2 Reconnaître les ensembles E_1 et E_2 puis interpréter les résultats géométriquement.

□ **Exercice Q.8 (Rang etc...)**

On donne les matrices augmentées $(A_i | B_i)$ associées à des systèmes (S_i) . Déterminer le rang, les inconnues principales et secondaires, et son éventuelle compatibilité.

Q1 $(A_1 | B_1) = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & -4 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{array} \right)$

Q3 $(A_3 | B_3) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ -3 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$

Q2 $(A_2 | B_2) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -3 & 4 \\ 5 & 2 & 0 & -1 \end{array} \right)$

Q4 $(A_4 | B_4) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 3 \end{array} \right)$

□ **Exercice Q.9 (Calculer le rang d'une matrice à paramètres)**

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Déterminer, suivant les scalaires a et b , le rang des matrices suivantes :

$$I = \begin{pmatrix} a & a \\ b & b \\ a & a \end{pmatrix} \quad J = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \quad K = \begin{pmatrix} 0 & a & a \\ a & 0 & a \\ a & a & 0 \end{pmatrix} \quad L = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ b & a & 0 \\ 0 & b & a \end{pmatrix}$$

□ **Exercice Q.10 (Familles de vecteurs)**

Q1 Soit le vecteur $u = (-2; 1; -4; 7) \in \mathbb{R}^4$. A-t-on $u \in \text{Vect}((2; 2; 1; 2), (1; 0; 1; 1), (1; 1; 1; 2))$?

Q2 On considère le sous-ensemble F de $\mathbb{R}^3$ défini par: $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, 2x - y + z = 0\}$

- a. Le vecteur $(-1; -1; 1)$ appartient-il à F ?
- b. Montrer que $F = \text{Vect}((1; 2; 0), (0; 1; 1))$. (Utiliser la géométrie... Pour une méthode générale voir exos Q.13 et Q.14)
- c. Déterminer deux scalaires λ_1 et λ_2 tels que: $(-1; -1; 1) = \lambda_1(1; 2; 0) + \lambda_2(0; 1; 1)$

□ **Exercice Q.11 (Familles de vecteurs)**

Soient $v_1 = (1, 2, 3, 4)$ et $v_2 = (1, -2, 3, -4)$.

Q1 Peut-on déterminer deux réels x et y tels que $(x, 1, y, 1) \in \text{Vect}(v_1, v_2)$?

Q2 Peut-on déterminer deux réels x et y tels que $(x, 1, 1, y) \in \text{Vect}(v_1, v_2)$?

□ **Exercice Q.12 (Familles libres/liées)**

Q1 Dans $\mathbb{R}^4$ on considère les vecteurs $u = (-3; 1; 0; 2)$, $v = (1; 1; 0; 0)$, $w = (1; 1; 1; 1)$. La famille (u, v, w) est-elle libre ou liée ?

Q2 Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les vecteurs $u_1 = (1; 1; 1; 1)$, $u_2 = (2; 0; 2; 0)$, $u_3 = (-1; -1; 0; 0)$ et $u_4 = (0; 0; 1; 1)$. Déterminer si la famille (u_1, u_2, u_3, u_4) est libre ou liée.

□ **Exercice Q.13 (Familles génératrices)**

Soit la famille $\mathcal{F}$ de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ où $\mathcal{F} = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ avec

$$u_1 = (2, -2, 3), u_2 = (-1, -1, 2) \text{ et } u_3 = (3, -1, 2) \text{ et } u_4 = (-2, -2, 3).$$

Q1 Sans calcul, expliquez pourquoi la famille $\mathcal{F}$ est liée.

Q2 Démontrer que $\mathcal{F}$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$.

Q3 Soit $u = (1, 1, 1) \in \mathbb{R}^3$. Justifier que u peut s'écrire comme combinaison linéaire de u_1, u_2, u_3 et u_4 puis déterminer quatre réels tels que : $u = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 + \lambda_4 u_4$

□ **Exercice Q.14 (Important : passage implicite vers explicite)**

On désigne par F le sous-ensemble de $\mathbb{R}^4$ défini par:

$$F = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4, x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \right\}$$

(On définit ici F de façon implicite, c'est à dire avec une équation cartésienne)

Déterminer trois vecteurs u_1, u_2 et u_3 tels que $F = \text{Vect}(u_1, u_2, u_3)$

(On demande donc de trouver une expression explicite de F , c'est à dire une représentation paramétrique).

Indic : les éléments de F sont les solutions d'un "système" à une équation et 4 inconnues. On cherche à écrire les solutions sous forme explicite...

Pour voir si on a bien compris : déterminer les formes explicites des espaces suivants :

$$\mathbf{Q1} \quad F_1 = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \begin{cases} 2x - 3y + z = 0 \\ 2x + y - z = 0 \end{cases} \right\} \quad \mathbf{Q2} \quad F_2 = \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^3 / \begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x - y + z - t = 0 \end{cases} \right\}$$

□ **Exercice Q.15 (Important : passage explicite vers implicite)**

Soient $v_1 = (1, 2, 3, 4)$ et $v_2 = (1, -2, 3, -4)$ et $F = Vect(v_1, v_2)$ (forme explicite).

Donner un système d'équations cartésiennes (forme implicite) de F .

Indic : donner les conditions pour que le système d'inconnues a et $b : (x, y, z, t) = av_1 + bv_2$ soit compatible...

Pour voir si on a bien compris : déterminer une expression implicite de $Vect(v_1, v_2, v_3)$ avec $v_1 = (1, 2, 1, 2)$, $v_2 = (1, -2, 1, -2)$ et $v_3 = (1, 0, 1, 0)$.

Algorithme de Gauss-Jordan

Pour résoudre un système linéaire, on a vu en cours que l'on pouvait y associer une matrice A et qu'il était intéressant de trouver une matrice A' équivalente à A (au sens des opérations élémentaires) *échelonnée* voire *réduite*.

Voici une version algorithmique de l'algorithme de Gauss vu en cours. Il permet d'obtenir la matrice échelonnée A' à partir de celle de A :

```

1 A est une matrice réelle de taille n x p
2 i, j = 1, 1
3 Tant que i ≤ n et j ≤ p faire :
4     Si la j-ème colonne est non nulle :
5         k0 = indice de la ligne ≥ i d'un élément non nul de la col. j
6         permuter Li et Lk0
7         Pour k de i+1 à n faire :
8             Lk = Lk -  $\frac{a_{k,j}}{a_{i,j}}$  Li
9         i = i + 1
10        j = j + 1
11 A est alors échelonnée

```

Q1 Tester cet algorithme à la main sur la matrice ci-dessous :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Q2 Pousser ensuite les opérations élémentaires pour obtenir la matrice réduite.

Q3 Recopier et modifier l'algorithme de Gauss pour obtenir l'algorithme de Gauss-Jordan.

Q4 Résoudre par cette technique le système :

$$\begin{cases} 2z - 2t + 8u = -6 \\ x + 2y + z + 5u = -1 \\ -2x - 4y - z - 8u = -1 \end{cases}$$

Q5 Contrôler les résultats en utilisant le fichier python fourni implémentant les algorithmes de Gauss et de Gauss-Jordan (il utilise la bibliothèque `numpy` pour davantage de souplesse d'écriture).