Planche S : suites numériques

☐ Exercice S.1 (Visualiser une suite définie par récurrence)

Représenter graphiquement le comportement des suites (u_n) et (v_n) en fonction de la valeur de leur premier terme :

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n} \text{ et } u_0 \geqslant 0 \qquad\qquad v_{n+1} = \frac{1}{v_n} \text{ et } v_0 > 0$$

Voir l'application geogebra : https://www.geogebra.org/m/tfpHzxSx

☐ Exercice S.2 (Suites avec python)

Q 1 On considère la suite (u_n) définie par $u_n = \dfrac{\ln(n)}{\sqrt{n}}$.

Écrire une fonction python qui reçoit un entier n et qui renvoie la liste des termes u_1 à u_n. Que vaut u_{10} ?

Q 2 On considère la suite (v_n) définie par $v_{n+1} = \dfrac{21}{20}v_n - 100$ et $v_0 = 1000$.

a. Écrire une fonction python qui reçoit un entier n et qui renvoie la liste des termes v_0 à v_n. Que vaut v_{10} ?

b. On admet que (v_n) deviendra négative à partir d'un certain rang.
Quel est le plus petit n tel que $v_n < 0$?

Q 3 Soit $w_0 = \frac{1}{10}$ et $w_{n+1} = 3w_n - \frac{1}{5}$. Utiliser la fonction python précédente pour calculer w_{50}. Que se passe-t-il ?

☐ Exercice S.3 (Existence d'une suite définie par récurrence)

Peut-on définir une suite (u_n) par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \ln(u_n) \end{cases}$

☐ Exercice S.4 (Récurrences descendantes)

Déterminer le terme général de (u_n) , (v_n) et (w_n) par « récurrence descendante »

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{2}{n+1}\, u_n \end{cases} \qquad \begin{cases} v_0 > 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = \sqrt{v_n} \end{cases} \qquad \begin{cases} w_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ w_{n+1} = 1 - 2w_n \end{cases}$$

☐ Exercice S.5 (Une suite définie de façon implicite)

Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ et x réel, on pose $g_n(x) = x^n + nx - 1$.

Q 1 En distinguant les cas n pair et impair, établir le tableau de variations des fonctions g_n.

Q 2 Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique réel $u_n > 0$ tels que : $x^n + nx - 1 = 0$. ((u_n) est une suite définie implicitement).

☐ **Exercice S.6 (Monotonie)**

Étudier la (stricte) monotonie éventuelle des suites suivantes :

$$u_n = 1 + \frac{1}{n} \qquad v_n = -\frac{n^n}{n!} \qquad s_n = (-1)^n \qquad t_n = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$$

☐ **Exercice S.7**

Q 1 Le produit de deux suites minorées est-elle minorée ?

Q 2 Montrer que si u est croissante à partir d'un certain rang alors elle est minorée.

☐ **Exercice S.8**

Soit (u_n) une suite croissante. On considère $v_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$.

Q 1 Montrer que pour tout $n > 0$, $v_n \leqslant u_n$.

Q 2 En déduire que (v_n) est croissante aussi.

☐ **Exercice S.9 (Suites arithmétiques/géométriques)**

On considère (u_n) définie par : $\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{1+0{,}5u_n}{0{,}5+u_n} \\ u_0 = 2 \end{cases}$ Le but est de déterminer la limite de la suite (u_n). Pour cela, on considère une suite (v_n) définie par : $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 1}$.

Q 1 Conjecturer à l'aide d'un algorithme la limite de la suite (u_n).

Q 2 Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $-\dfrac{1}{3}$, puis donner son écriture explicite.

Q 3 On admet que pour tout n on a $v_n \neq 1$. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n = \dfrac{1+v_n}{1-v_n}$.

Q 4 Déterminer la limite de la suite (u_n).

☐ **Exercice S.10 (Suites arithmétiques/géométriques)**

Soit la suite numérique (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{2}{3}u_n + \dfrac{1}{3}n + 1 \\ u_0 = 2 \end{cases}$

On désigne de plus par (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n - n$.

Q 1 **a.** Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{2}{3}$.

b. En déduire que pour tout entier naturel n, $u_n = 2\left(\dfrac{2}{3}\right)^n + n$

c. Déterminer la limite de la suite (u_n).

Q 2 Pour tout entier naturel non nul n, on pose:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \ldots + u_n \quad \text{et} \quad T_n = \frac{S_n}{n^2}.$$

a. Exprimer S_n en fonction de n.

b. Déterminer la limite de la suite (T_n).

☐ **Exercice S.11 (limite avec la définition)**

On considère une suite réelle positive (u_n) vérifiant pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'ensemble $\{n \in \mathbb{N},\ u_n > 10^{-k}\}$ est fini. Montrer que la suite (u_n) converge vers 0.

☐ **Exercice S.12 (limite avec la définition)**

Soit (u_n) une suite dont tous les termes sont des entiers relatifs. Montrer que si cette suite converge, alors elle est constante à partir d'un certain rang (stationnaire).

☐ **Exercice S.13 (limite avec la définition, on coupe en deux)**

Soit (u_n) une suite telle qu'il existe une suite α_p tendant vers 0 vérifiant :

$$\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2 \quad |u_n| \leqslant \alpha_p + \frac{p}{n+1}$$

Montrer que (u_n) tend vers 0.

☐ **Exercice S.14 (Un classique : le théorème de Césaro)**

Soit (u_n) une suite réelle convergente. On considère la suite $v_n = \dfrac{u_1 + u_2 + \ldots + u_n}{n}$.

Q 1 Supposons que (un) converge vers 0.

a. Soit $\varepsilon > 0$. Justifier qu'il existe un rang $n_1 \in \mathbb{N}$ à partir duquel $|u_n| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$.

b. On considère alors la suite $w_n = \dfrac{u_1 + \cdots + u_{n_1}}{n}$. Justifier qu'il existe un rang n_2 à partir duquel $|w_n| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$.

c. En déduire que (v_n) tend vers 0.

Q 2 Supposons maintenant que (u_n) converge vers un réel ℓ quelconque. Démontrer que (v_n) converge aussi vers ℓ.

☐ **Exercice S.15 (Limites)**

Soit (u_n) une suite réelle telle que $u_{n+1} - u_n \longrightarrow \ell$. Montrer que $\dfrac{u_n}{n} \longrightarrow \ell$.
(Indic : utiliser Cesaro sur la suite (s_n) définie par $s_n = u_n - u_{n-1}$)

☐ **Exercice S.16 (Divergence et suites extraites)**

En utilisant des suites extraites, montrer que les suites $u_n = (-1)^n$ et $v_n = \cos(n\pi/4)$ sont divergentes.

☐ Exercice S.17

Q 1 Si (u_n) est une suite convergente, montrer que $u_{n+1} - u_n$ tend vers 0.

Q 2 Montrer que la somme d'une suite convergente et d'une suite divergente est divergente.

Q 3 Trouver deux suites divergentes dont la somme est une suite convergente et dont le produit est une suite convergente.

☐ Exercice S.18

Illustrer chacun des cas en exhibant deux suites u et v :

Q 1 $u \longrightarrow +\infty$, $v \longrightarrow -\infty$ et $u+v$ converge.

Q 2 $u \longrightarrow +\infty$, $v \longrightarrow -\infty$ et $u+v$ diverge.

Q 3 $u \longrightarrow +\infty$, $v \longrightarrow 0$ et uv converge.

Q 4 $u \longrightarrow +\infty$, $v \longrightarrow 0$ et uv diverge.

☐ Exercice S.19 (Opérations sur les limites)

Étudier les limites des suites :

Q 1 $u_n = \dfrac{\sin(n^2)}{n}$

Q 2 $v_n = \dfrac{a^n - b^n}{a^n + b^n}$ $(a > 0, b > 0)$

Q 3 $s_n = \dfrac{n^3 + 5n}{5n^3 + \cos n + \dfrac{1}{n^2}}$

Q 4 $t_n = \dfrac{2n + (-1)^n}{5n + (-1)^{n+1}}$

Q 5 $x_n = \sqrt{n - \cos n} - \sqrt{n}$

Q 6 $y_n = \ln(n^2 + 1) - 2\ln(n)$

☐ Exercice S.20 (sin(n) n'admet pas de limite !)

On se propose de démontrer que la suite $u_n = \sin(n)$ n'admet pas de limite. Pour cela raisonnons par l'absurde en supposant que $\sin(n) \longrightarrow \ell$.

Q 1 Compléter la formule trigonométrique (factorisation) : $\sin(n+2) - \sin(n) = ...$

Q 2 En déduire que $\cos(n) \longrightarrow 0$ puis que $\ell = \pm 1$.

Q 3 Compléter la formule $\sin(2n) = \dots$

Q 4 En déduire que $\ell = 0$ et conclure.

☐ Exercice S.21 (Encadrement)

Monter que les suites convergent et déterminer leur limite :

Q 1 $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2 + k}}$

Q 2 $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{\sqrt{n^4 + k}}$

Q 3 $w_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \frac{k}{k + n^2}$

Q 4 $s_n = \left(\sin\dfrac{1}{n^2} + \dfrac{1}{5}\cos n\right)^n$

☐ Exercice S.22 (Encadrement)

On admet que, pour tout $x \geqslant 0$, $x - \frac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$.

Déterminer la limite de la suite (u_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \dfrac{k}{n^2}\right)$.

☐ Exercice S.23 (Suite implicite, encadrement)

Q 1 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que l'équation $nx = \cos(x)$ possède une unique solution dans $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ que l'on notera x_n.

Q 2 Sans chercher à expliciter x_n, montrer que la suite (x_n) converge vers 0.

☐ Exercice S.24 (sens de variations, encadrements)

Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{2^n (n!)^2}{(2n)!}$.

Q 1 Étudier les variations de (u_n).

Q 2 Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geq 2$, $\quad u_n < \dfrac{n+1}{2^n}$.

Q 3 Qu'en déduire ?

☐ Exercice S.25 (Suites monotones)

Soit u la suite définie par : $u_n = \sum_{p=0}^{n} \dfrac{1}{p!}$.

Q 1 Montrer que $\forall p \geqslant 1 \quad \dfrac{1}{p!} \leqslant \dfrac{1}{2^{p-1}}$.

Q 2 En déduire que u converge vers une limite $\ell \leqslant 3$. *(Nous verrons plus tard que $\ell = e = \exp(1)$)*

☐ Exercice S.26 (Suites monotones)

Soit (u_n) une suite réelle croissante admettant une sous-suite majorée. Montrer que (u_n) converge *(Penser à un raisonnement par l'absurde. . .)*

☐ Exercice S.27 (Étude d'une suite récurrente)

On considère la fonction f définie sur $I = [0\,;4]$ par $f(x) = \sqrt{6+x}$.

Q 1 Justifier que f est croissante sur I.

Q 2 Montrer que I est stable par f, c'est à dire que : $\forall x \in I,\ f(x) \in I$.

Q 3 On définit alors la suite (u_n) par $\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) \\ u_0 = 0 \end{cases}$

a. Montrer à l'aide d'une mini récurrence que (u_n) est bornée et donner des bornes.

b. Montrer que (u_n) est croissante.

c. Montrer que (u_n) est convergente.

d. Déterminer la limite de (u_n).

e. Conclure sur les bornes inférieures et supérieures de (u_n).

☐ **Exercice S.28 (Étude d'une suite récurrente)**

Soit f la fonction définie sur $I = [0\,;+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x^2+x+1}$.
Soit la suite (u_n) définie par $u_0 > 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

Q 1 Vérifier que pour tout $x \in I$, $f(x) \in I$. Ce qui permet de justifier que la suite (u_n) existe pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Q 2 Justifier que (u_n) admet une limite.

Q 3 Déterminer cette limite.

☐ **Exercice S.29 (Étude d'une suite récurrente)**

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + \dfrac{3}{16}$.

Q 1 Démontrer que l'intervalle $I = \left[0\,;\frac{1}{4}\right]$ est stable par f.

Q 2 On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) \\ u_0 = \dfrac{1}{5} \end{cases}$

a. Justifier que (u_n) existe pour tout n et qu'elle est bornée.

b. Calculer u_1 et montrer par une récurrence (immédiate) que (u_n) est croissante.

c. En déduire que (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

☐ **Exercice S.30 (suite récurente avec f contractante)**

On considère une fonction f définie sur un intervalle I vérifiant :

- I est stable par f (c'est à dire $f(I) \subset I$)
- $\forall (x,y) \in I^2,\ |f(x)-f(y)| \leqslant k|x-y|$ avec $k \in]0\,;1[$ (on dit que f est *contractante*)
- Il existe $\ell \in I$ tel que $f(\ell) = \ell$ (l est un *point fixe*).

On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 \in I \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

Q 1 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1}-\ell| \leqslant k|u_n-\ell|$.

Q 2 En déduire que (u_n) converge vers ℓ.

Q 3 *Application :* on considère la fonction f définie sur $I = [0\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$.

a. Montrer que $\forall x \in I,\ |f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{4}$.

b. Montrer que $\forall(x,y)\in I^2,\ |f(x)-f(y)|\leqslant \dfrac{1}{4}|x-y|$ *(On pourra utiliser une intégrale…)*

c. Montrer que la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ converge, et déterminer sa limite.

☐ **Exercice S.31 (Suites adjacentes)**

Montrer que les suites (u_n) et (v_n) dont les termes généraux sont $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$ et $v_n = u_n + \dfrac{1}{n}$ sont adjacentes. Qu'en déduit-on sur la convergence de u ?

☐ **Exercice S.32 (Suites adjacentes)**

Montrer que les suites $u_n = \displaystyle\sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p!}$ et $v_n = u_n + \dfrac{1}{n!}$ sont adjacentes, et donc convergentes.

☐ **Exercice S.33 (Suites adjacentes)**

On considère la suite u définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \displaystyle\sum_{p=0}^{n} \frac{(-1)^p}{p+1}$. On pose $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$.
Montrer que les suites (v_n) et (w_n) sont adjacentes. En déduire que la suite u est convergente.

☐ **Exercice S.34 (Suites adjacentes)**

(u_n) et (v_n) sont définies par: $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{3u_n+1}{4} \end{cases}$ et $\begin{cases} v_0 = 2 \\ v_{n+1} = \dfrac{3v_n+1}{4} \end{cases}$

Q 1 Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant 1 \leqslant v_n$

Q 2 Montrer que la suite (w_n) de terme général $w_n = v_n - u_n$ est géométrique.

Q 3 Démontrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes et déterminer leur limite commune.

☐ **Exercice S.35 (Dichotomie)**

Soit une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. La méthode de *dichotomie*, étudiée en informatique permet d'approcher la solution de l'équation $f(x) = 0$ avec p bits significatifs en p étapes, ce qui est très efficace.
Ses conditions d'utilisation sont assez simples : on demande seulement à la fonction f d'être continue et de changer de signe. Cette méthode est basée sur la construction de deux suites adjacentes (a_n) et (b_n) dont la limite est la solution α de l'équation $f(x) = 0$.

Q 1 Rappeler le principe de cet algorithme (en français et en python) et justifier sa convergence.

Q 2 Application : trouver une solution approchée à 10^{-3} près sur $I = [0\,;1]$ de $x^5 - 3x^3 - 1 = 0$