

Notes de wred^o

exos S - - -

(S3)
$$\begin{cases} \mu_0 = 2 \\ \mu_{n+1} = \frac{2}{n+1} \mu_n \end{cases}$$

$$\mu_n = \frac{2}{n} \mu_{n-1}$$

$$\mu_{n-1} = \frac{2}{n-1} \mu_{n-2}$$

$$\mu_{n-2} = \frac{2}{n-2} \mu_{n-3}$$

- - - -

$$\mu_1 = \frac{2}{1} \mu_0$$

$$\mu_n = \frac{2^n}{n!} \times 2$$

product

$$v_n = \sqrt{v_{n-1}}$$

$$\ln(v_n) = \frac{1}{2} \ln(v_{n-1})$$

$$\ln(v_{n-1}) = \frac{1}{2} \ln(v_{n-2}) \times \frac{1}{2}$$

$$\ln(v_{n-2}) = \frac{1}{2} \ln(v_{n-3}) \times \frac{1}{2^2}$$

- - - -

$$\ln(v_1) = \frac{1}{2} \ln(v_0) \times \frac{1}{2^{n-1}}$$

Soit

$$\ln(v_n) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} \right) \ln(v_0)$$

$$\ln(v_n) = \frac{1}{2} \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} \ln(v_0)$$

$$v_n = \exp\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \times v_0$$

$$\begin{cases} \omega_0 \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \omega_{n+1} = 1 - 2\omega_n \end{cases}$$

$$\omega_n = 1 - 2\omega_{n-1}$$

$$\omega_{n-1} = 1 - 2\omega_{n-2} \times (-2)^1$$

$$\omega_{n-2} = 1 - 2\omega_{n-3} \times (-2)^2$$

- - - -

$$\omega_1 = 1 - 2\omega_0 \times (-2)^{n-1}$$

(+)

$$\omega_n = 1 + (-2)^1 + (-2)^2 + \dots + (-2)^{n-1} - 2\omega_0$$

$$\omega_n = \frac{1 - (-2)^n}{1 - (-2)} - 2\omega_0$$

$$\omega_n = \frac{1 - (-2)^n}{3} - 2\omega_0$$

S21 ---

Q3. $\forall k \in [1, 2m]$ $\frac{k}{2n+m^2} \leq \frac{k}{k+m^2} \leq \frac{k}{1+m^2}$

par suite:

$$\frac{1}{2n+m^2} \sum_{k=1}^{2m} k \leq u_m \leq \frac{1}{1+m^2} \sum_{k=1}^{2m} k$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{(2m+1) \times m} \qquad \underbrace{\hspace{10em}}_{(2m+1)m}$

$$\frac{m(2m+1)}{2n+m^2} \leq u_m \leq \frac{m(2m+1)}{1+m^2}$$

$\downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow$
 $\frac{1}{2} \qquad \qquad \qquad \frac{1}{2}$

$u_m \rightarrow \frac{1}{2}$

Q4. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad -\frac{1}{5} \leq \frac{\cos n}{5} \leq \frac{1}{5}$

$\forall n \geq 2, \quad 0 \leq \sin \frac{1}{n^2} \leq \sin \frac{1}{4} \leq \frac{1}{4}$

par suite: $\forall n \geq 2: \quad -\frac{1}{5} \leq \sin \frac{1}{n^2} + \frac{1}{5} \cos n \leq \frac{1}{5} + \frac{1}{4}$

donc $\left| \sin \frac{1}{n^2} + \frac{1}{5} \cos n \right|^m \leq \left(\frac{9}{20} \right)^m \xrightarrow{\rightarrow 0}$

donc $u_m \rightarrow 0$

$$(S22) \quad u_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n^2} \right)$$

Potons:

$$v_n = \ln(u_n) = \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{k}{n^2} \right)$$

$$\forall k \in [1, n], \quad \frac{k}{n^2} - \frac{k^2}{n^4} \leq \ln \left(1 + \frac{k}{n^2} \right) \leq \frac{k}{n^2}$$

On somme:

$$\underbrace{\frac{1}{n^2} \sum k}_{\downarrow 1/2} - \underbrace{\frac{1}{n^4} \sum k^2}_{\downarrow 0} \leq v_n \leq \underbrace{\frac{1}{n^2} \sum k}_{\downarrow 1/2}$$

d'où $v_n \rightarrow 1/2$

d'où $u_n = e^{v_n} \rightarrow e^{1/2}$

(S24) $u_n = \frac{2^n (n!)^2}{(2n)!}$

Q1. Comparons u_{n+1} et u_n grâce au quotient car ils sont > 0 .

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{n+1} ((n+1)!)^2}{(2(n+1))!} \times \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2}$$

$$= \frac{2^{n+1} (n+1)^2 (n!)^2 \cancel{(2n)!}}{(2n+2)(2n+1)(2n)! 2^n (n!)^2}$$

$$= \frac{2 (n+1)^2}{2(n+1)(2n+1)} = \frac{n+1}{2n+1} < 1 \quad \text{car } 2n+1 > n+1$$

Donc (u_n) est $\searrow$.

Q2 Init: $u_2 = \frac{2^2 (2!)^2}{4!} = \frac{4 \times 4}{4 \times 3 \times 2} = \frac{2}{3}$

$$\bullet \frac{n+1}{2^n} = \frac{3}{4}$$

On a bien $u_n < \frac{n+1}{2^n}$ pour $n=2$.

Hérédité: On suppose $u_n < \frac{n+1}{2^n}$

$$\text{On veut } u_{n+1} < \frac{n+2}{2^{n+1}}$$

$$\text{On a (vu en Q1): } u_{n+1} = \frac{n+1}{2n+1} u_n$$

$$< \frac{n+1}{2n+1} \times \frac{n+1}{2^n} \quad (\text{H.P.})$$

$$< \underbrace{\frac{(n+1)^2 \times 2}{(n+2)(2n+1)}}_A \times \frac{(n+2)}{2^{n+1}}$$

Montrons que $A < 1$:

$$2(n+1)^2 = 2n^2 + 4n + 2 \quad \text{et} \quad (n+2)(2n+1) = 2n^2 + 5n + 2$$

$$\text{donc } A < 1 \quad \text{et on déduit } u_{n+1} < \frac{n+2}{2^{n+1}}$$

concl: $\forall n \geq 2 \quad u_{n+1} \leq \frac{n+2}{2^{n+1}}$

Q3. Par existence comparée on a: $\frac{n+1}{2^n} \rightarrow 0$

et par comparaison on déduit:

$$u_n \rightarrow 0$$

(S29) $f(x) = x^2 + \frac{3}{16}$

Q1. $f'(x) = 2x \geq 0$ si $x \in [0, \frac{1}{4}]$.

D'où le tableau:

x	0	$\frac{1}{4}$
s.f'		+
v.f	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{4}$

D'après ce tableau

on déduit bien: si $x \in I$ alors $f(x) \in I$

(ie) $f(I) \subset I$

Q2 a. $u_0 = \frac{1}{5} \in I$, donc d'après Q1 et par récurrence immédiate on déduit que u_n existe pour tout n , et que $u_n \in I$.

$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq \frac{1}{4}$

Q2b. $u_1 = f(u_0) = f(\frac{1}{5}) = \frac{1}{25} + \frac{3}{16} = \frac{91}{400}$

or $u_0 = \frac{1}{5} = \frac{80}{400}$, donc $u_0 < u_1$.

Rédigeons la réc. immédiate: $\forall n \geq 0, u_n \leq u_{n+1}$

* init pour $n=0$ c'est vrai d'après ce qui précède

* hérid.: on sup. $u_n \leq u_{n+1}$ et on veut

montrer que: $u_{n+1} \leq u_{n+2}$.

En effet: si $u_n \leq u_{n+1}$ alors puisque $f \nearrow$

on a: $u_{n+1} \leq u_{n+2}$.

* Concl. $(u_n) \nearrow$

Q2c. $(u_n) \nearrow$ et maj. par $\frac{1}{4}$ donc

(u_n) conv. vers $l \leq \frac{1}{4}$

Q2d. $u_{n+1} = u_n^2 + \frac{3}{16}$. Par passage à la limite (possible d'après Q2c)

$l = l^2 + \frac{3}{16}$

$l = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ ou $l = \frac{1}{4}$

$l = \frac{1 \pm \frac{1}{2}}{2} = \frac{3}{4}$ ou $\frac{1}{4}$

Donc

$u_n \rightarrow \frac{1}{4}$

(S30) Q1. Pour $n \in \mathbb{N}$:

$$|u_{n+1} - l| = |f(u_n) - f(l)| \leq k |u_n - l|$$

Q2. Rec. descendante:

$$|u_n - l| \leq k |u_{n-1} - l|$$

$$|u_{n-1} - l| \leq k |u_{n-2} - l|$$

$$|u_1 - l| \leq k |u_0 - l|$$

produit

$$|u_n - l| \leq k^n |u_0 - l|$$

Or $k \in]0, 1[$, donc $k^n \rightarrow 0$ et $u_n \rightarrow l$

Q3 a $f'(x) = -\frac{1}{(x+2)^2}$ et $|f'(x)| = \frac{1}{(x+2)^2}$

Or pour $x \geq 0$ on a $(x+2)^2 \geq 4$ d'où $\frac{1}{(x+2)^2} \leq \frac{1}{4}$

On déduit $|f'(x)| \leq \frac{1}{4}$

Q3 b $-\frac{1}{4} \leq f'(x) \leq \frac{1}{4}$

$$-\int_a^b \frac{1}{4} dx \leq \int_a^b f'(x) dx \leq \int_a^b \frac{1}{4} dx \quad \left. \vphantom{\int_a^b} \right\} a \leq b$$

$$-\frac{b-a}{4} \leq f(b) - f(a) \leq \frac{b-a}{4}$$

donc si $a \leq b$: $|f(b) - f(a)| \leq \frac{|b-a|}{4}$

De m, si $a > b$: $-\int_b^a \frac{1}{4} dx \leq \int_b^a f'(x) dx \leq \int_b^a \frac{1}{4} dx$

$$-\frac{a-b}{4} \leq f(a) - f(b) \leq \frac{a-b}{4}$$

si $a > b$: $|f(a) - f(b)| \leq \frac{|a-b|}{4}$

Dans tous les cas: $|f(x) - f(y)| \leq \frac{|x-y|}{4}$

Q3c Voyons si l'on peut appliquer Q1/Q2

avec $I =]0, +\infty[$ et $f(x) = \frac{1}{x+2}$

* $f \searrow$ avec $f(0) = \frac{1}{2} > 0$ et $f \xrightarrow{+\infty} 0$.

donc $f(]0, +\infty[) =]0; \frac{1}{2}] \subset I$.

* $\forall (x, y) \in I^2$, $|f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{4} |x - y|$, $\frac{1}{4} \in]0, 1[$.

* $f(x) = x \Leftrightarrow x = \frac{1}{2+x} \Leftrightarrow x^2 + 2x - 1 = 0$

$$\Delta = 8 \quad x_i = \frac{-2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = -1 \pm \sqrt{2}.$$

$(-1 - \sqrt{2} \notin]0, +\infty[)$ Il existe $l = -1 + \sqrt{2} \in I$
tel que $f(l) = l$.

D'après Q1/Q2 $(u_n) \rightarrow -1 + \sqrt{2}$

(S34)

Q1. * Pour $n=0$: $u_0 = 0 \leq 1$ } 04
 $v_0 = 2 \geq 1$.

* Supp : $u_n \leq 1 \leq v_n$, et Ng $u_{n+1} \leq 1 \leq v_{n+1}$:

On a : (HR) $u_n \leq 1 \leq v_n$

$$\begin{array}{l} 3u_n \leq 3 \leq 3v_n \\ 1+3u_n \leq 4 \leq 3v_n+1 \\ u_{n+1} \leq 1 \leq v_{n+1} \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \times 3 \\ +1 \\ \div 4 \end{array} \right\}$$

* Cond : $\forall n \geq 0, u_n \leq 1 \leq v_n$

Q2 $w_{n+1} = v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{3v_n+1}{4} - \frac{3u_n+1}{4}$
 $= \frac{3(v_n - u_n)}{4} = \frac{3}{4} w_n$.

Donc (w_n) geom. de raison $\frac{3}{4}$ avec $w_0 = v_0 - u_0 = 2$

Puisque $\frac{3}{4} \in]-1, 1[$ on déduit $w_n \rightarrow 0$.

Q3 . * $u_{n+1} - u_n = \frac{3u_n+1}{4} - u_n = \frac{1-u_n}{4} \geq 0$
(car $u_n \leq 1$).

Donc $(u_n) \nearrow$.

* De m : $v_{n+1} - v_n = \frac{1-v_n}{4} \leq 0$ (car $v_n \geq 1$)

Donc $(v_n) \searrow$.

* On a vu que $(v_n - u_n) \rightarrow 0$.

Donc (u_n) et (v_n) sont adjacentes et convergent vers $l \in \mathbb{R}$.

On a nécessairement $l = 1$

$$\left(\begin{array}{l} \text{car } u_n \leq 1 \Rightarrow l \leq 1 \\ \text{et } v_n \geq 1 \Rightarrow l \geq 1 \end{array} \right)$$