CHAPITRE

$\mathcal{U}$

TSI[1]

Lycée Artaud

2024/2025

Limites - Continuité

Sommaire

I Aspect local : limite et continuité

On s'appuiera et généralisera les notions rencontrées dans le chapitre sur les suites…

Dans tout ce chapitre, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ (voire une réunion d'intervalles), non vide et non réduit à un point. On note $\bar{I}$ l'intervalle I auquel on a rajouté ses "bords" (on parle de l'*adhérence* de I).

Soit f une fonction définie sur I et $a \in \bar{I}$.

I.1 Limites

I.1.1 Limites à l'infini

Le vocable « à l'infini » est utilisé pour dire que $a = \pm\infty$. Ici cela se passe comme pour les suites !

♪ Définition I.1.1 (Limite finie en $+\infty$)

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell \iff \forall \varepsilon > 0,\ \exists A \in \mathbb{R} \ /\ \forall x \in I,\ (x \geqslant A \implies \ell - \varepsilon \leqslant f(x) \leqslant \ell + \varepsilon)$$

♪ Définition I.1.2 (Limite infinie en $+\infty$)

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \iff \forall M > 0,\ \exists A \in \mathbb{R} \ /\ \forall x \in I,\ (x \geqslant A \implies f(x) \geqslant M)$$

À vous d'écrire les définitions au voisinage de $-\infty$.

S1

Interprétation graphique :

S2

I.1.2 Limites en un point

♪ Définition I.1.3 (Limite finie en $a \in \mathbb{R}$)

$$f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell \iff \forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0 \ /\ \forall x \in I,\quad |x - a| \leqslant \eta \implies |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$$

REMARQUES – Écrire sans valeur absolue :

S3

Interprétation graphique :

S4

Propriété I.1.4 (unicité)

Soit $a \in \mathbb{R}$ ou $a \in \{-\infty, +\infty\}$. Si $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$ et $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell'$ alors $\ell = \ell'$.

Preuve

C'est peu ou prou la même que celle sur les suites. . . □

♪ Définition I.1.5 (Limite infinie en $a \in \mathbb{R}$)

$$f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} +\infty \iff \forall M > 0,\ \exists \eta > 0 \ /\ \forall x \in I, \quad |x-a| \leqslant \eta \implies f(x) \geqslant M$$

I.1.3 Limites à gauche et à droite

Parfois on aura besoin de se limiter à droite ou à gauche d'un point. On définit alors :

♪ Définition I.1.6 (limite à gauche, limite à droite)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et a un point de l'adhérence de I (c'est à dire dans I ou éventuellement sur le bord).

- On suppose qu'il existe $\eta > 0$ tel que $]a, a+\eta[\subset I$. On dit que f admet une limite à droite en a si la restriction de f à $]a, a+\eta[$ admet une limite en a. On note $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} \dots$.
- On suppose qu'il existe $\eta > 0$ tel que $]a-\eta, a[\subset I$. On dit que f admet une limite à gauche en a si la restriction de f à $]a-\eta, a[$ admet une limite en a. On note $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} \dots$.

EXEMPLE – Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \lfloor x \rfloor$. Donner les limites à droite et à gauche de la fonction f en 1.

S5

I.1.4 Opérations sur les limites

Propriété I.1.7 (4 opérations)

Pour les 4 opérations usuelles, les résultats sont « naturels », mais on fera toujours attention aux **formes indéterminées**.

Rappels : pour lever des indéterminations on peut :

- Factoriser par la quantité prépondérante (au voisinage de l'infini)
- Multiplier par les quantités conjuguées (souvent quand il y a des racines carrées)
- Se ramener aux limites usuelles (avec un changement de variable)
- Utiliser les développements limités (voir plus tard dans l'année !)

Opération de composition :

Propriété I.1.8 (Composition)

Soit $f : A \to \mathbb{R}$ et $g : B \to \mathbb{R}$ avec $f(A) \subset B$. Soit $a \in \overline{A}$ et $b \in \overline{B}$. Alors :

$$\begin{cases} f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} b \\ g(t) \underset{t\to b}{\longrightarrow} \ell \end{cases} \implies g \circ f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$$

REMARQUES – C'est cette propriété que l'on utilise lorsque l'on dit que l'on fait un *changement de variable*. Par exemple, déterminer la limite en 2 de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{\sin(x^2-4)}{x^2-4}$.

S6

☐ ✍ Exercice U.1 ☐ ✍ Exercice U.2 ☐ ✍ Exercice U.3 ☐ ✍ Exercice U.4
☐ ✍ Exercice U.5 ☐ ✍ Exercice U.6 ☐ ✍ Exercice U.7

I.2 Continuité

I.2.1 Continuité en un point

Propriété I.2.1 (continuité en a)

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $a \in I$. On dit que f est **continue en** a lorsque la phrase suivante est vraie :

$$f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell \implies \ell = f(a)$$

Sinon on dit qu'elle est *discontinue* en a.

Olivier BRÉBANT
Lycée Artaud – 2024/2025

Exemple – La fonction « partie entière » est-elle continue en 1 ?

S7

On verra plus loin une justification plus rapide...
Remarques – La continuité n'est donc qu'un cas particulier de la notion de limite.

I.2.2 Prolongement par continuité

Propriété I.2.2

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et a un réel dans $\overline{I} \backslash I$. Si f admet une limite **finie** ℓ en a, alors on peut prolonger f en la fonction $\tilde{f}$ définie par :

$$\tilde{f}: \begin{array}{ccc} I \cup \{a\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} f(x) \text{ si } x \neq a \\ \ell \text{ sinon} \end{cases} \end{array}$$

On dit dans ce cas que f se prolonge par continuité en a (et on notera souvent encore, par abus de langage, f cette fonction...)
Exemple –

- Étudier le prolongement éventuel de la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = x\ln(x)$.

S8

- Étudier le prolongement éventuel de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$.

S9

I.2.3 Continuité à droite et à gauche

Définition I.2.3

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et a un point de I.

- On suppose qu'il existe $\eta > 0$ tel que $[a, a+\eta[\subset I$. On dit que f est continue à droite en a si la restriction de f à $[a, a+\eta[$ est continue en a, c'est à dire tend vers $f(a)$ en a.
- idem à gauche...

EXEMPLE – Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \lfloor x \rfloor$. Étudier la continuité à droite et à gauche de la fonction f en 1.

S10

I.2.4 Lien entre continuité à droite, à gauche, et continuité tout court

Propriété I.2.4

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et a un point intérieur à I (c'est à dire qu'il existe $\eta > 0$ tel que $]a - \eta, a + \eta[\subset I$.

$$\boxed{f \text{ est continue en } a \text{ si et seulement si } f \text{ est continue à gauche et à droite de } a}$$

EXEMPLE – La fonction partie entière est-elle continue en 1 ?

S11

I.2.5 Opérations et continuité

La continuité étant un cas particulier de limite finie, tous les résultats vus sur les opérations sur les limites se traduisent en continuité en a.
Par exemple si f et g sont continues en a alors $f + g$ est aussi continue en a. À vous de voir les autres opérations...

☐ ✍ **Exercice U.8** ☐ ✍ **Exercice U.9**

I.3 Propriétés des fonctions admettant une limite en $a \in \overline{I}$

I.3.1 Caractère localement borné

Propriété I.3.1

Soit $a \in \overline{I}$. Si $f \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell$ avec $m < \ell < M$ alors *au voisinage* de a on a : $m < f(x) < M$ (c'est à dire f est bornée au voisinage de a).
En particulier si $\ell > 0$ alors au voisinage de a on a $f(x) > 0$.

REMARQUES –

- On a déjà vu ce résultat dans le chapitre sur les suites...
- En particulier si une fonction est continue en a, alors elle est bornée au voisinage de a.

I.3.2 Passage à la limite dans une inégalité

Propriété I.3.2

Soit f et g deux fonctions définies sur I avec limites respectives $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ et $\ell' \in \overline{\mathbb{R}}$ en $a \in \overline{I}$.
Si au voisinage de a on a $f(x) < g(x)$ (ou $f(x) \leqslant g(x)$) alors $\ell \leqslant \ell'$.

Exemple – Donner des exemples pour illustrer ce comportement :

S12

I.4 Théorèmes d'existence de limites

Attention ! – Ne jamais écrire lim ... ou faire de passage à la limite tant que l'existence de la limite n'a pas été prouvée.

I.4.1 Composition avec une suite

Un cas très courant et très utile :

☺ Théorème I.4.1

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, $a \in \overline{I}$ et (x_n) une suite d'éléments de I qui tend vers a. Alors :

$$f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell \implies f(x_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ell$$

Preuve

On admettra ce résultat, mais la preuve serait bien sympa à faire ;-) □

Remarques –

- Dans l'énoncé du théorème on n'a écrit « tend vers a » et non pas « converge vers a ». Pourquoi ? ....
- Pour montrer que f ne tend pas vers ℓ lorsque $x \to a$, il suffit de trouver une suite (x_n) qui tend vers a et telle que la suite $(f(x_n))$ ne tend pas vers ℓ.
- Pour montrer que f n'admet pas de limite en a, il suffit de trouver deux suites (x_n) et (y_n) qui tendent vers a telles que $(f(x_n))$ et $(f(y_n))$ tendent vers deux limites différentes.

Exemple – Montrer que $f(x) = \sin(x)$ n'admet pas de limite en $+\infty$.

S13

Corollaire

Si f est **continue** en a :

$$x_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} a \implies f(x_n) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} f(a)$$

Application : on utilise souvent ce corollaire quand on étudie une suite définie par récurrence et que l'on souhaite faire un passage à la limite.
Par exemple, supposons que :

- (u_n) vérifie pour tout $n \in \mathbb{N}$ la relation $u_{n+1} = f(u_n)$,
- (u_n) converge vers ℓ (on a l'existence mais pas la valeur de ℓ),
- f est continue en ℓ.

Alors par passage à la limite on déduit que ℓ est nécessairement solution de l'équation $f(x) = x$.

Exemple – Considérons la suite (u_n) définie par $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1}$ et $u_0 = 0$. Supposons que l'on ait déjà montré que (u_n) était convergente, déterminer sa limite :

S14

☐ ✍ **Exercice U.10** ☐ ✍ **Exercice U.11** ☐ ✍ **Exercice U.12**

I.4.2 Théorème d'encadrement

Propriété I.4.2

Soit f, g et h trois fonctions définies sur I vérifiant :

$$\forall x \in I,\ f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$$

Soit $a \in \overline{I}$. Alors :

$$\begin{cases} f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell \in \overline{R} \\ h(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell \in \overline{R} \end{cases} \implies g(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell$$

I.4.3 Limite monotone

☺ Théorème I.4.3 (limite monotone)

Soit $I =]a\,;b[$ avec a et b dans $\overline{\mathbb{R}}$ et f une fonction **monotone** sur I.
Alors f admet des limites (finies ou infinie) en a et en b.

Exemple – Étudier la limite éventuelle en 0^+ de $f(x) = \sqrt{x}\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$. *(On donnera deux solutions : l'une utilisant le théorème de la limite monotone et l'autre celui d'encadrement)*

S15

S16

☐ ✍ **Exercice U.13**

II Aspect global : continuité

II.1 Définition

♪ Définition II.1.1

Soit $f : I \to \mathbb{R}$. On dit que f est continue sur I si elle est continue en tout point $a \in I$.
L'ensemble des fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$ se note $\mathscr{C}(I, \mathbb{R})$ ou encore $\mathscr{C}^0(I, \mathbb{R})$.

REMARQUES – on ne parle ici de continuité que sur un *intervalle* I (et pas sur une réunion d'intervalles ou autre chose plus complexe. . .)

Propriété II.1.2 (Opérations)

Les 4 opérations usuelles ainsi que la composition conservent la continuité sur leur ensemble de définition.

EXEMPLE – Les fonctions de références suivantes qui sont toutes continues sur leur ensemble de définition :

- Les fonctions polynômes et les fonctions fractions rationnelles (quotient de fonction polynômes)
- Les fonctions trigonométriques
- les fonctions exponentielles, logarithmes, puissances (y compris puissances dans $\mathbb{Q}$).

☐ ✍ **Exercice U.14**

II.2 Propriétés liées aux fonctions continues

☺ Théorème II.2.1 (valeurs intermédiaires)

Soit I un intervalle, $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction **continue** et $(a, b) \in I^2$. Prenons un réel k quelconque entre $f(a)$ et $f(b)$.

- Cas général : il existe **au moins un** réel c entre a et b tel que $f(c) = k$.
- Cas des fonctions **strictement monotones** : il existe **un et un seul** réel c entre a et b tel que $f(c) = k$.

Preuve

Voir planche exos... □

Application : C'est ce théorème que l'on a utilisé dans l'exercice consacré à la résolution par dichotomie d'une équation de la forme $f(x) = 0$ (vu dans le chapitre sur les suites et en info).

Corollaire

L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

EXEMPLE – Voyons sur quelques exemples que divers comportement peuvent se produire :

- Soit $I = [0\,;1]$ et $f = \exp$.
  Alors $f(I) = \dots\dots\dots\dots$
- Soit $I = \mathbb{R}$ et $f = \sin$.
  Alors $f(I) = \dots\dots\dots\dots$
- Soit $I = \mathbb{R}$ et $f = \arctan$.
  Alors $f(I) = \dots\dots\dots\dots$
- Soit $I = \left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$ et $f = \tan$.
  Alors $f(I) = \dots\dots\dots\dots$
- Soit $I = \mathbb{R}$ et $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.
  Alors $f(I) = \dots\dots\dots\dots$

On peut toutefois préciser un peu les choses avec :

☺ Théorème II.2.2 (image d'un segment)

L'image d'un segment (un intervalle fermé borné) par une fonction continue est un segment.
Plus précisément, si $f \in \mathscr{C}([a\,;b], \mathbb{R})$ alors $f([a\,;b)] = [m\,;M])$ avec :

$$m = \inf_{x\in[a;b]} f(x) = \min_{x\in[a;b]} f(x) \quad \text{et} \quad M = \sup_{x\in[a;b]} f(x) = \max_{x\in[a;b]} f(x)$$

REMARQUES –

- m et M ne sont pas forcément $f(a)$ et $f(b)$.
- Il est essentiel que I soit fermé. Par exemple si $I =]0\,;1]$ et $f = \ln$ alors $f(I) =]-\infty\,;0]$.
- On retiendra : **Toute fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.**

☺ Théorème II.2.3 (Cas des fonctions strictement monotones)

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, et f une fonction continue et strictement monotone sur I. On a :

- $f(I)$ est un intervalle
- f réalise une bijection de I sur $f(I)$
- La fonction réciproque de f, notée f^{-1} est aussi continue et de même sens de variation que f.
- Les représentations de f et de f^{-1} sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

EXEMPLE – Rappel : montrer que la restriction de la fonction sin à l'intervalle $I = \left[-\frac{\pi}{2} \,;\, \frac{\pi}{2}\right]$ réalise un bijection de I vers $J = f(I)$ à déterminer. Dessiner les représentations graphiques.

S17

☐ ✍ **Exercice U.15** ☐ ✍ **Exercice U.16** ☐ ✍ **Exercice U.17** ☐ ✍ **Exercice U.18**
☐ ✍ **Exercice U.19** ☐ ✍ **Exercice U.20**

III Quelques exos « en vrac »

☐ ✍ **Exercice U.21** ☐ ✍ **Exercice U.22** ☐ ✍ **Exercice U.23** ☐ ✍ **Exercice U.24**
☐ ✍ **Exercice U.25**