

(V7) $f(x) = e^{\frac{1}{\ln|x|}}$

Q1 f est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0, -1, 1\}$ car $x \neq 0$ pour que $\ln|x|$ existe et $x \neq \pm 1$ pour $\frac{1}{\ln|x|}$ existe.

Q2a Étude en 0 :

$$\frac{1}{\ln|x|} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

donc $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$

On peut prolonger f par continuité en 0 par la valeur $f(0) = 0$.

Q2b. Dérivabilité en 0 :

$$\tau_0(h) = \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{e^{\frac{1}{\ln|h|}}}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} \pm \infty$$

Donc $\tau_0(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} \pm \infty$

Donc f n'est pas dérivable en 0.

Q2. On prolonge f par $f(1) = 0$.

* Étude à gauche de 1 : $h < 0$.

$$\tau_1(h) = \frac{e^{\frac{1}{\ln|h|}} - 0}{h}$$

On pose $t = \ln|h|$, $h = e^t - 1$, $t \xrightarrow{h \rightarrow 0^-} 0^-$

$$\tau_1(h) = \frac{e^{1/t}}{e^t - 1} = \left(\frac{1}{t} \times e^{1/t} \right) \times \left(\frac{t}{e^t - 1} \right) \xrightarrow{t \rightarrow 0^-} 1 \text{ (lim. acc.)}$$

0 (croiss. comparée)

D'où $\tau_1(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0^-} 0$ (ie) f dérivable à gauche de 1

* Étude à droite de 1 : $h > 0$.

$$\tau_1(h) = \frac{e^{1/t}}{e^t - 1} \text{ avec } t \xrightarrow{h \rightarrow 0^+} 0^+$$

D'où $\tau_1(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0^+} +\infty$ (ie) f non dérivable à droite de 1

VII $f(x) = e^{-1/x^2}$ et $f(0) = 0$.

Q1. * f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$.

* En 0: montrons que f est dérivable puis que f' continue:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{-1/h^2}}{h} \stackrel{t = \frac{1}{h^2}}{=} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^{-t}}{\frac{1}{\sqrt{t}}} = 0 \quad (\text{Croiss. comp.})$$

Donc $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = 0$ (Croiss. comp.)

Donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$

* $\forall x \neq 0$: $f'(x) = \frac{2}{x^3} e^{-1/x^2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ (justif.)

donc f' est continue en 0.

Concl: f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$

Q2. Init: $f^{(0)} = e^{-1/x^2} = \frac{P_0(x) e^{-1/x^2}}{x^{3 \times 0}}$ avec $P_0 = 1$

Héréd: On sup. la formule vraie pour n et on la montre pour $n+1$:

$$f^{(n+1)}(x) = f^{(n)'}(x) = \left(\frac{P_n(x) e^{-1/x^2}}{x^{3n}} \right)'$$

$$= \left(\frac{P_n(x)}{x^{3n}} \right)' e^{-1/x^2} + \frac{P_n(x)}{x^{3n}} \times \frac{-2}{x^3} e^{-1/x^2}$$

$$= \frac{P_n'(x) x^{3n} - P_n(x) 3n x^{3n-1}}{x^{3n} \times x^{3n}} e^{-1/x^2} - \frac{2 P_n(x)}{x^{3(n+1)}} e^{-1/x^2}$$

$$= \frac{e^{-1/x^2}}{x^{3(n+1)}} \left(\frac{P_n'(x) x^{3n} - P_n(x) 3n x^{3n-1}}{x^{3n-3}} - 2 P_n(x) \right)$$

$$= \frac{e^{-1/x^2}}{x^{3(n+1)}} \underbrace{\left(x^3 \times P_n'(x) - P_n(x) \times 3n x^2 - 2 P_n(x) \right)}_{P_{n+1}(x)}$$

Concl: $\forall n, \exists \text{ poly } P_n / f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x) e^{-1/x^2}}{x^{3n}}$

Q3. f est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$,

(ie) $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$