Exo suite et TAF

Exercice I

On note f la fonction définie sur $[1\,;e]$ par $f(x) = \dfrac{2x}{\ln(x)+1}$ et g la fonction définie sur $[0\,;1]$ par $g(t) = \dfrac{2t}{(1+t)^2}$.

Q 1 En étudiant les variations de g, démontrer que pour tout $t \in [0\,;1]$, on a $0 \leqslant g(t) \leqslant \dfrac{1}{2}$.

Q 2 En étudiant les variations de f démontrer que l'intervalle $[1\,;e]$ est stable par f.

Q 3 En remarquant (ou admettant) que pour tout $x \in [1\,;e]$ on a $f'(x) = g\big(\ln(x)\big)$, justifier que pour tout $x \in [1\,;e]$, on a $|f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{2}$.

Q 4 En déduire que pour tout $(x,y) \in ([1\,;e])^2$, on a $|f(x) - f(y)| \leqslant \dfrac{1}{2}|x-y|$.

Q 5 On définit une suite (u_n) par $u_0 = 1$ et pour tout n, $u_{n+1} = f(u_n)$.
Utiliser ce qui précède pour démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $|u_n - e| \leqslant \dfrac{e-1}{2^n}$.

Q 6 Déterminer la limite de la suite (u_n) ?

Q 7 (Facultatif) À partir de quel rang est-on sûr que u_n est à moins de 10^{-3} de e ?