Planche W : comportement asymptotique + DL

☐ **Exercice W.1**

Donner une condition nécessaire et suffisante sur α et β pour avoir $n^\alpha = o(n^\beta)$.

☐ **Exercice W.2 (Domination)**

Q 1 Pour $a \in \mathbb{R}$, posons $u_n = \dfrac{a^n}{n!}$. Montrer l'existence d'un entier naturel n_0 tel que :

$$\forall k \geqslant n_0 \quad \frac{|u_{k+1}|}{|u_k|} \leqslant \frac{1}{2}$$

Q 2 En déduire que $u_n \to 0$, c'est à dire que $a^n = o(n!)$

☐ **Exercice W.3**

Compléter (en justifiant) les phrases :

Q 1 Si u est dominée par une suite v bornée, alors u est ...

Q 2 Si u est dominée par une suite v qui tend vers 0, alors u ...

Q 3 Si u est négligeable devant une suite bornée, alors u ...

☐ **Exercice W.4**

Q 1 Soit u une suite ne s'annulant pas à partir d'un certain rang. A-t-on $u_{n+1} \sim u_n$?

Q 2 Soit u une suite admettant une limite finie ℓ. A-t-on $u_n \sim \ell$?

☐ **Exercice W.5**

Soit u et v deux suites ne s'annulant pas à partir d'un certain rang avec $u \sim v$.
La proposition suivante est-elle vraie : si u est monotone alors v est monotone ?

☐ **Exercice W.6**

Q 1 Soit α et β deux réels avec $\alpha < \beta$. Montrer que $x^\alpha \underset{+\infty}{=} o(x^\beta)$ et que $x^\beta \underset{0}{=} o(x^\alpha)$

Q 2 Soit f une fonction polynomiale $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} a_k x^k$, ou l'on suppose a_p et a_n non nuls.

Montrer que $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} a_p x^p$ et que $f(x) \underset{x\to\pm\infty}{\sim} a_n x^n$.

☐ **Exercice W.7**

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère l'équation $x^n(1+x) - 1 = 0$, d'inconnue $x \in [0\,;+\infty[$.

Q 1 Montrer que cette équation admet une unique solution x_n.

Q 2 **a.** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $n \ln x_n = -\ln(1+x_n)$

b. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $-\dfrac{\ln 2}{n} \leqslant \ln x_n < 0$

c. En déduire la limite ℓ de (x_n) lorsque $n \to +\infty$.

Q 3 **a.** Montrer que $\ln x_n \sim -\dfrac{\ln 2}{n}$.

b. À l'aide de l'équivalent classique en 0 de $\ln(1+x)$ donner un équivalent de $\ln t$ pour t au voisnage de 1, puis en déduire un équivalent simple de $x_n - \ell$.

☐ **Exercice W.8 (Opérations)**

Q 1 Donner un équivalent simple de la suite $u_n = \left(n^2 + \dfrac{1}{n}\right)(n+1)\left(1 + \dfrac{1}{n} + \dfrac{3}{n^2}\right)$.

Q 2 Donner un équivalent simple de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k$.

Q 3 Supposons $a_n \to \ell \neq 0$. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k \sim n\ell$.

☐ **Exercice W.9 (Opérations)**

Q 1 *Produits :*

a. Donner un équivalent simple au voisinage de l'infini de $u_n = \dfrac{2}{(n+1)(n+2)}$

b. Donner un équivalent simple au voisinage de 0 de $f(x) = \dfrac{(e^x - 1)^2}{(1+x)^5 - 1}$.

Q 2 *Produits « infinis » :*

a. Montrer que $n \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) \to 1$, puis déterminer la limite de $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$.

b. En comparant $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$ et $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$, que dire quant-aux produits infinis d'équivalents ?

☐ **Exercice W.10 (Opérations)**

Q 1 *Addition :*

a. Que dire sur une fonction f si au voisinage de a on a $f \sim 0$?

b. Soit $f(x) = \sin(x)$ et $g(x) = -x$. Donner des équivalents simples de f et g au voisinage de 0. Que dire de $f + g$? Conclure quant-à l'addition d'équivalents.

c. Trouver trois suites u, v et w telles que $u \sim v$ et $u + w$ n'est pas équivalente à $v + w$.

Q 2 *Composition :*

a. Montrer que $e^{f(x)} \underset{x \to a}{\sim} e^{g(x)} \iff f(x) - g(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0$.

b. Trouver f et g équivalentes au voisinage de l'infini mais telles que e^f et e^g ne le soient pas. Conclure quant-à la composition d'équivalents.

Q 3 *Substitution :* Donner des équivalents simples de $\sin 2t$ en 0 et de $e^{1/x^2} - 1$ en $+\infty$.

☐ **Exercice W.11 (Quelques limites)**

On note $f(x) = x^{(x^x)} - 1$ et $g(x) = x^{(x^x - 1)}$. Déterminer les limites en 0^+ de f et g.

On rappelle l'existence d'outils numériques performants pour travailler avec les DL :

- Avec XCAS (plusieurs versions en ligne sont disponibles), par exemple ici. Il y a des assistants pour calculer des limites ou des DL. La syntaxe est : `series(expression, lieu, ordre)`
Par exemple : `series(exp(x),0,2)` donne $e(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + O(x^3)$ *(Attention au "grand O")*
- Avec Geogebra en général, et des « appliquettes » comme ici.

☐ **Exercice W.12 (Opérations(addition/produits))**

Q 1 $DL_3(0)$ de $f(x) = \mathrm{e}^x + \ln(1+x)$

Q 2 $DL_3(0)$ de $f(x) = \dfrac{1}{1-x} - \mathrm{e}^x$

Q 3 $DL_2(0)$ de $f(x) = \mathrm{e}^x (1+x)^{1/3}$

Q 4 $DL_6(0)$ de $f(x) = \left(\ln(1+x) - x + \dfrac{x^2}{2}\right)(\cos(x) - 1)$ *(essayer d'anticiper l'ordre optimal du DL de chaque facteur...)*

☐ **Exercice W.13 (Opérations (composition/quotients))**

Q 1 **a.** On a déjà vu que $\tan x \sim x$ au voisinage de 0. En passant par la dérivée puis en prenant une primitive donner le $DL_3(0)$ de la fonction tan.

b. Recommencer le procédé pour déterminer le $DL_5(0)$ de tan.

Q 2 $DL_3(0)$ de $f(x) = \dfrac{1}{1 - \ln(1+x)}$.

Q 3 $DL_3(0)$ de $f(x) = \sqrt{1 + \tan x}$.

Q 4 $DL_3(0)$ de $f(x) = \ln(1 + e^x)$

Q 5 $DL_3(0)$ de $f(x) = \ln(1 + cos(x))$

Q 6 $DL_2(0)$ de $f(x) = \arctan\left(\dfrac{x}{1 + x + x^2}\right)$.

Q 7 $DL_2(0)$ de $f(x) = \ln\left(e^{2x} + 2e^x + 3\right)$

☐ **Exercice W.14 (DL en $a \neq 0$)**

Q 1 $DL_5(\frac{\pi}{2})$ de $\cos^3 x$ **Q 2** $DL_3(\infty)$ de $\frac{1}{1-x}$. **Q 3** $DL_n(a)$ de $\ln(x)$.

☐ **Exercice W.15 (Développement asymptotique)**

On considère la fonction $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^3}{x-1}}$.

Q 1 Montrer qu'au voisinage de $+\infty$ on $f(x) \sim x$.

Q 2 Pour $x>0$ montrer que $\dfrac{f(x)}{x} = \left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{-1/2}$

Q 3 Montrer que $\dfrac{f(x)}{x} = 1 + \dfrac{1}{2x} + \dfrac{3}{8x^2} + o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$

Q 4 Déterminer des réels a et b tels que $f(x)-(ax+b)$ tende vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$ Interpréter ce résultat graphiquement.

Q 5 Déterminer la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à la droite précédente, au voisinage de $+\infty$.

☐ **Exercice W.16 (Dev. asymptotique)**

Donner le développement limité de e^x en 0, puis réinjecter celui-ci dans la fonction $f(x) = (e\cdot x)^x$. Cela donnera un développement asymptotique de f en 0.

☐ **Exercice W.17 (Développement asymptotique)**

On rappelle que cotan$=\dfrac{\cos}{\sin}$.

Q 1 Pourquoi peut-on affirmer que la fonction cotan n'admet aucun DL en 0, à n'importe quel ordre ?

Q 2 Soit la fonction $f : t \longmapsto t$ cotan t.
Déterminer le DL de f en 0 à l'ordre 3. Que peut-on en déduire pour f ?

Q 3 En déduire un dév. en 0 pour la fonction cotan (appelé *développement asymptotique*).

☐ **Exercice W.18 (Limites)**

Q 1 Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{x^3} e^{-x}$.

Q 2 Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

Q 3 Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\ln(1+x)}\right)$

Q 4 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\left(\sqrt{x^2+2}-x+1\right)^x\right)$.

☐ **Exercice W.19 (limites)**

Trouver λ tel que la fonction $f(x) = \dfrac{1}{\tan^2(x)} + \dfrac{1}{\tan^2(2x)} - \lambda\dfrac{1}{\tan^2(3x)}$ admette une limite finie en 0, et donner cette limite.

☐ **Exercice W.20 (Étude locale de courbe)**

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $f(x) = x^{1+\frac{1}{x}}$.

Q 1 Montrer que $f(x) \sim x$ au voisinage de $+\infty$.

Q 2 Donner un développement asymptotique de f à 3 termes.

Q 3 La courbe représentant f admet-elle une asymptote oblique ?