

# PLANCHE AB : INTÉGRATION

□ **Exercice AB.1 (Positivité stricte)**

Soit  $f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ .

On suppose que  $\int_{[0,1]} f = 0$ . Montrer que  $f$  s'annule au moins une fois.

□ **Exercice AB.2 (Positivité stricte)**

Soit  $f(x) = \ln(1 + \sin^3(x))$  définie sur  $[0, \pi]$  et  $I = \int_{[0,\pi]} f$ . A-t-on  $I < 0$ , ou  $I = 0$  ou  $I > 0$  ?

□ **Exercice AB.3 (Positivité stricte)**

Soit  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  une application continue telle que  $\int_0^1 f = \int_0^1 f^2$ . Identifier  $f$ .

□ **Exercice AB.4**

On définit la fonction  $f$  par :  $f(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t} dt$ .

**Q1** Justifier rigoureusement le domaine de définition  $\mathcal{D}_f$  de  $f$ . Justifier que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathcal{D}_f$ .

**Q2** Étudier le signe de  $f$ , ainsi que ses variations.

**Q3** Par encadrement, déterminer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .

**Q4** Dans le cas où  $x \in ]0, 1]$ , montrer rigoureusement que  $f(x) \leq \ln x$ . En déduire  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ .

**Q5** À l'aide de toutes les questions précédentes, représenter la courbe représentative de  $f$  (en particulier, on tracera la tangente au point d'abscisse 1)

□ **Exercice AB.5**

Soit  $f$  définie sur  $]0 ; 1[$  par  $f(x) = \int_{x^2}^{x^3} \frac{dt}{\ln t}$ . Justifier que  $f$  est dérivable et déterminer  $f'$ .

□ **Exercice AB.6 (IPP)**

**Q1** Avec deux intégrations par parties successives, déterminer  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos(x) dx$  et  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos^2(x) dx$

**Q2** Calculer :  $I = \int_0^\pi x \sin(3x) dx$       $J = \int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx$       $K = \int_{-1}^0 x^3 e^{-x^2} dx$

**Q3** À l'aide d'une IPP, déterminer une primitive de  $f_n : x \mapsto x^n \ln x$  (où  $n \in \mathbb{N}$  est fixé).

**Q4** À l'aide d'une double IPP, calculer  $K = \int_0^{\ln 2} x^2 e^{-x} dx$ .

□ **Exercice AB.7 (IPP, suites)**

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  on définit  $I_n = \int_0^1 t^n e^t dt$ .

**Q1** Démontrer que pour tout  $n$  on a :  $I_n = e - nI_{n-1}$ .

□ **Exercice AB.8 (Étudier une suite définie par une intégrale)**

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $u_n = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^n}$

**Q1** Calculer  $u_0, u_1, u_2$ .

**Q2** Montrer que  $(u_n)$  est une suite strictement croissante, puis que  $(u_n)$  converge.

**Q3** Vérifier que :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, |u_n - 1| = \int_0^1 \frac{x^n dx}{1+x^n}$ . En déduire que :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$ .

**Q4 a.** Établir que :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \int_0^1 \frac{x^n dx}{1+x^n} = \frac{\ln 2}{n} - \frac{1}{n} \int_0^1 \ln(1+x^n) dx$

**b.** Montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \ln(1+x^n) dx = 0$  (on utilisera une majoration classique de  $\ln$ )

**c.** En déduire que  $u_n = 1 - \frac{\ln 2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$

□ **Exercice AB.9**

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  et  $F$  une primitive de  $f$  sur  $I$ .

**Q1** Si  $f$  est impaire, montrer à l'aide d'un changement de variable que  $F$  est paire.

**Q2** Si  $f$  est paire, montrer que  $F$  n'est pas nécessairement impaire.

**Q3** Si  $f$  est périodique, que pensez-vous de  $F$  ? Considérer par exemple  $f(x) = \cos(x) + 1$  et conclure.

□ **Exercice AB.10 (Changements de variables)**

**Q1** À l'aide du changement de variable  $t = e^x$ , calculer  $A = \int_0^1 \frac{1}{e^x + 1} dx$ .

**Q2** Déterminer les primitives sur  $]0, \pi[$  de  $f : x \mapsto \frac{1}{\sin x}$  en utilisant le changement "universel"  $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ . On rappelle les formules trigonométriques :

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2} \text{ et } \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

**Q3** En utilisant le changement  $u = t + \frac{\pi}{2}$  en déduire les primitives sur  $\left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$  de  $\frac{1}{\cos x}$ .

□ **Exercice AB.11 (Changements de variable affines)**

**Q1** On veut calculer  $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + \sin x}$ .

– Effectuer le changement de variable  $t = \frac{\pi}{2} - x$ . En déduire que  $I = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\cos^2 \frac{t}{2}}$ .

– Effectuer le changement de variable  $u = \frac{t}{2}$ . En déduire enfin la valeur de  $I$ .

**Q2** Déterminer une primitive de  $f : x \mapsto \frac{1}{1 + \sin x}$ .

□ **Exercice AB.12 (Changement de variable affine)**

Pour  $x \in \mathbb{R}$  fixé, calculer  $I = \int_0^1 \frac{u}{1 + ux} dx$

□ **Exercice AB.13 (Changement de variable)**

Après avoir mis l'expression  $t^2 - 2t + 2$  sous forme canonique, effectuer un changement de variable pour

calculer  $I = \int_0^1 \frac{1}{t^2 - 2t + 2} dt$

□ **Exercice AB.14 (Changement de variable)**

Soit  $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$  définie sur  $[0 ; 1]$ .

**Q1** Poser  $x = \sin t$  pour calculer  $I = \int_0^1 f(x) dx$ .

**Q2** Vérifier que  $I$  est l'aire du quart de disque de rayon 1, puis retrouver la formule donnant l'aire d'un disque de rayon 1.

□ **Exercice AB.15**

On pose  $I = \int_0^{\pi/2} \sin^2 x dx$  et  $J = \int_0^{\pi/2} \cos^2 x dx$ .

**Q1** Calculer  $I + J$ .

**Q2** En effectuant un changement de variable affine, montrer que  $I = J$  puis en déduire leur valeur.

□ **Exercice AB.16 (Taylor)**

**Q1** Appliquer l'égalité de Taylor avec reste intégral (ordre  $n = 1$ ) à la fonction cosinus pour montrer que  $\forall x \in \mathbb{R}, \cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}$ .

**Q2** Montrer que pour tout  $x \in ]-1, +\infty[$  et  $n \in \mathbb{N}$  on a :

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k + (-1)^n \int_0^x \frac{(x-t)^n}{(1+t)^{n+1}} dt$$

Exercice AB.17 (Taylor)

Calculer :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} \right)$

 Exercice AB.18 (Sommes de Riemann)

Démonstration du théorème de la convergence des sommes de Riemann dans le cas d'une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  sur un segment  $[a, b]$ .

 Exercice AB.19 (Sommes de Riemann)

Donner la limite lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$  de  $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n}$

 Exercice AB.20 (Sommes de Riemann)

Soit  $\alpha \geq 0$ . En utilisant la somme de Riemann de la fonction  $f(x) = x^\alpha$  entre 0 et 1, donner un équivalent lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$  de  $S_\alpha(n) = \sum_{k=1}^n k^\alpha$

 Exercice AB.21 (Sommes de Riemann)

Trouver  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{n+k}}{n\sqrt{n}}$ .

 Exercice AB.22 (Sommes de Riemann)

Soit  $v_n = \sum_{k=1}^n k e^{k/n}$ . Montrer que  $v_n \sim n^2$ .